Chapitre VI

SINGULARITÉ, EXTRÉMALITÉ ET BIFURCATION, OU, LES ATTRIBUTS DE LA STABILITÉ

VI. 1 La singularité et l'extrémalité[14]

Dans un monde à la Parménide[15], en perpétuel changement, l'immobile est singulier. Cependant, comme chaque fois dans nos aventures intellectuelles, l'étude statique précède l'étude dynamique parce que ce qui est fixe, étant plus longtemps visible, s'imprègne en premier et avec plus de force dans nos esprits. Le concept de singularité a été élaboré par référence à une vision figée du monde. Ce n'est que plus tard qu'il a pris sa place dans une perception plus complète de notre univers, où les transformations, les changements sont incessants. Dans cette perspective dynamique, les singularités sont apparues comme les lieux particuliers où peuvent se produire des transformations parfois importantes, voire radicales, appelées *bifurcations* par les mathématiciens.

Singularité, extrémalité et bifurcation sont trois notions que l'on peut considérer comme inséparables. Je ne m'attarderai pas, dans ce texte, sur l'extrémalité, mais porterai par contre une plus grande attention aux conceptions dynamiques liées à la notion de singularité, car les phénomènes les plus intéressants, les plus significatifs de notre univers sont les phénomènes de genèse et de fin des choses (*generatio et corruptio*), qui relèvent typiquement des théories de la bifurcation. Celles portant sur l'extrémalité et la singularité en sont les prémisses.

---

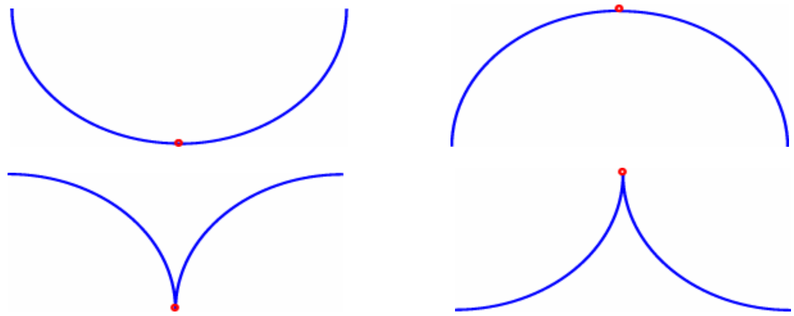
[14] Néologisme que j'ai introduit dans les Notices de l'AMS en 1968.

[15] « Car tout, de même que la pensée, trouve en tout temps, le mélange de ses organes errants …. »

Il est impossible de retracer en quelques lignes l'histoire de la théorie des singularités. Une citation donnée plus avant de Pierre de Fermat (1601-1665) révèle que ce grand mathématicien avait bien compris l'une des propriétés importante de la singularité, donnée de manière implicite dans le titre de ce paragraphe. Sur un plan plus technique, on peut convenir de dater le début de cette théorie par un travail de Poisson publié en 1806 sur les solutions singulières des équations différentielles, bientôt suivi, en 1814, par une publication de Cauchy sur les *intégrales singulières*. La notion de singularité apparaît plus généralement dans l'étude des fonctions analytiques où se sont illustrés Bernhard Riemann (1826-1866), Karl Weierstrass (1815-1897), Victor Puiseux (1820-1883). On peut considérer que le travail de Puiseux de 1850 marque le véritable début de la géométrie algébrique : l'étude des singularités en reste l'objectif essentiel. Quelques-uns des résultats, nombre de concepts (comme par exemple celui de généricité), nombre de méthodes utilisées en géométrie algébrique ont joué, par analogie et transfert, un rôle décisif dans l'études des singularités des applications différentiables. Hassler Whitney (1907-1989), Marston Morse (1892-1977), René Thom et Vladimir Arnold sont les principaux fondateurs, constructeurs et développeurs de cette dernière théorie.

Comme l'avait noté Poincaré rejoignant ici Parménide, l'instabilité est la règle. Les positions d'équilibre des objets sont peu nombreuses, elles forment des ensembles que l'on qualifie parfois de maigres, rares, singuliers. Le point le plus bas d'une cuvette, le sommet d'une montagne (cf la première figure), l'arête reliant deux sommets sont des points ou forme des ensembles de points dits *singuliers*. Les mathématiciens ont une définition précise de la singularité ; ils ont démontré un théorème (Sard) qui en établi la rareté. Ces singularités apparaissent de manière naturelle dans la théorie des systèmes dynamiques. On peut représenter les trajectoires de ces systèmes à deux dimensions sur des surfaces, représentations qui permettent de visualiser aisément les trajectoires singulières, comme par exemple les tores de dimension nulle (des points), ou de dimension 1 comme les trajectoires périodiques (courbes circulaires ou cycles) isolées au sein d'ensembles de trajectoires qui ne sont pas périodiques.

Singularités de Morse, « rondes », « dodues », « douces », non dégénérées



singularités « pointues », « acérées »

Figure 1

Ce qui détermine la singularité est un ensemble de propriétés plutôt *exceptionnelles* ; elles induisent la *rareté*, rareté qui peut attirer l'attention, et contribuer à déterminer la valeur ; les singularités peuvent être précieuses. Deux exemples simples illustreront ces faits. Considérés comme des singularités dans le monde des objets, les bijoux, des pièces souvent uniques, et plus généralement les œuvres d'art, se monnayent au prix fort, et acquièrent la célébrité. Toute personne douée de talents particuliers, quels que soient les domaines où ils s'exercent, acquiert souvent une aisance financière assortie d'une renommée qui peut la placer sur un piédestal. Si la richesse peut favoriser une stabilité spatio-temporelle locale, la renommée en est une expression qui peut atteindre une toute autre ampleur dans le cadre du phénomène humain.

De façon générale, par la géométrie qui lui est associée en son voisinage, la singularité joue, autour d'elle, un rôle actif de *centre organisateur*, tant sur le plan structurel que sur le plan fonctionnel, autorisé par le fait que les potentialités de transformation locale y sont de manière naturelle plus élevées qu'en des points réguliers. Les centres organisateurs qui apparaissent en embryologie et dans les systèmes en développement rentrent parfaitement dans ce cadre conceptuel.

Voici encore deux exemples simples à partir desquels on pourrait examiner plus en détail les différentes facettes de ce rôle. Le premier est emprunté à la biologie au sens large, puisqu'il concerne l'activité entre autre visuelle que nous déployons au cours d'un processus de reconnaissance des formes.

C'est par ses éléments saillants que nous prenons en effet conscience de la forme d'un objet, plongé dans l'espace qui constitue l'arrière-plan, un fond d'apparence uniforme. Ces éléments saillants en sont le bord où se produisent des ruptures de gradients lumineux, et plus spécialement en ce bord, les lieux où ces ruptures de gradient sont maximales, et où la forme elle-même possède des singularités plus ou moins anguleuses. L'œil parcourt rapidement et à plusieurs reprises ces ensembles de singularités dont les voisinages plus ou moins étendus forment des cartes locales : leur assemblage, leur intégration débouche sur la définition de la forme de l'objet. C'est également en ces singularités que s'élabore la perception, l'élaboration des courbures locales qui contribuent à cette définition. Le trajet oculaire peut alors être représenté par un ensemble de points (les points singuliers) reliés par des arêtes constituant le 1-squelette de l'objet [16].

Le second exemple est emprunté à l'étude des morphologies sociales. Dans la mesure où elles ont pour signification des positions localement ou globalement dominantes, les singularités incarnées peuvent avoir une vertu organisatrice et dynamique en ce sens qu'elles ont tendance à susciter autour d'elles des évolutions et des comportements divers, impliquant parfois des compétitions, des rivalités, conduisant à l'obtention de ces positions. Le chef, le président, est la personne singulière du groupe, de la société, qui coordonne et ordonne, donne l'impulsion.

Observons sur une montagne, une singularité quadratique représentée par un sommet arrondi ; en son voisinage, la forme de la montagne ne subit pas de changement brutal, et un alpiniste qui s'y déplace ne court point le danger d'une chute mortelle. Une manière de stabilité est associée à une telle morphologie, qui, par ailleurs, peut très bien représenter la répartition du pouvoir au sein des différents constituants d'une société.

A l'opposé, au voisinage d'un pic acéré, la forme de la montagne connaît des variations brutales : l'alpiniste qui atteint ce pic domine pleinement certes le paysage qui l'entoure, sur lequel il a une magnifique vue ; mais sa position y est fort instable, et il est partagé entre les impressions de plénitude et de fragilité. Ce pic correspond à une singularité que je qualifierais volontiers de « dictatoriale » : le type de montagne correspondant est une bonne représentation de la répartition du pouvoir au sein d'une société dotée d'un régime du même nom. Je ne suis pas sûr que les dictateurs, grisés par leur pouvoir, n'éprouvent pas également avec autant de force le sentiment de leur précarité : combien d'entre eux ont eu la crainte d'être empoisonnés !

Ces exemples empruntés au quotidien témoignent du lien très étroit entre singularité et extrémalité. Il est d'ailleurs inscrit au sein même de la définition adoptée ici de la singularité, en tant que représentation d'une ou d'un ensemble de situations exceptionnelles.

Du point de vue historique, on rencontrera, dans le prochain chapitre, la manière dont Platon exprimait l'extrémalité. Il est sans nul doute bien des textes d'historiens traitant, à travers celle de l'optimalité, de cette notion, et cela de manière de plus détaillée quoique implicite. Cependant, la perspective synthétique qui en a été donnée autrefois dans [11] semble encore assez fraîche pour qu'on puisse en reprendre l'essentiel pour ce qui nous concerne, ici.

> La notion d'extrémalité a été plus rapide à se dégager que la notion de stabilité. La stabilité n'est perçue que par opposition à une instabilité. Or, toute la philosophie socioreligieuse, mis à part quelques exceptions sans lendemain, concevait le monde

comme immuable, et pesait avec assez de poids sur les esprits pour freiner la perception du transitoire, de l'instable. Par contre, l'extrémalité est inscrite dans la Nature, dans le physique comme dans le social. Elle s'est d'abord manifestée comme une règle d'économie avec Fontenelle dans son *Entretien sur la Pluralité des Mondes,* avant lui et plus profondément avec Fermat ; dans *De Maximis et Minimis*, ce célèbre mathématicien démontre proprement la loi optique sin $i = n$ sin r : « Notre démonstration s'appuie sur le seul postulat que la nature opère par les moyens et les voies les plus faciles et les plus aisées. Car c'est ainsi que nous croyons qu'il doit être énoncé et non pas, comme on fait d'ordinaire, en disant que la nature opère par les voies les plus courtes ». Cette conception philosophique remonte en fait à une interprétation erronée d'une maxime d'Occam : « Il est vain de faire plus ce qui peut être fait avec moins ». Elle est à l'origine d'une règle d'action connue sous le nom de « Rasoir d'Occam » : utilisez l'hypothèse la plus simple.

On retrouve l'extrémalité en mécanique avec le principe de moindre action, en électromagnétisme et dans tous les domaines gouvernés par des champs de potentiel : les états d'équilibre stable sont atteints lorsque les potentiels sont à leur minima. Elle se manifeste en chimie avec les règles de Le Chatelier et le loi du minimum de Leibig, en thermodynamique où tout système tend vers un état d'entropie maximale, et où le principe de Gibbs-Delbruck-Molière joue un rôle essentiel, dans la vie économique où l'entrepreneur vise à maximiser son profit, le consommateur à minimiser sa dépense. Elle existe en sociologie où, pour attirer l'attention, exercer le pouvoir, certaines personnes, certains partis politiques, prennent des positions extrêmes, ou occupent des situations singulières. On la rencontre en psychologie, où souvent l'homme affiche des attitudes, des ambitions excessives qui le singularisent.

Puisque les mathématiques sont d'abord des modèles plus ou moins fins de représentation de notre environnement, il est naturel de se heurter à chaque pas à la notion d'extrémalité. Et les résultats obtenus ont été d'autant plus marquants que cette notion a été utilisée consciemment.

Il y eut le cinquième livre d'Apollonius où il « expose des propositions relatives aux longueurs maxima et minima », et, avant lui, « Pappus et les Anciens » qui savaient déjà que « les maxima et les minima sont uniques et singuliers » observe Fermat. Fermat a joué un rôle important dans la création de l'analyse par ses travaux « Sur les solutions des problèmes de géométrie par les courbes les plus simples », car il « remarque que, dans certains cas, les questions de maxima et de minima peuvent se résoudre plus élégamment et peut-être plus géométriquement, au moyen de la construction d'une tangente. » Or, la pente de la tangente en un point à une courbe n'est autre que la dérivée en ce point à l'équation qui définit la courbe.

L'extrémalité est à la base de tous les problèmes d'optimisation qu'on retrouve en physique et en mécanique avec les problèmes posés par le calcul des variations et la recherche des géodésiques, en économique avec les problèmes posés par la recherche des minimax. Elle a même laissé son nom à un théorème connu sous le nom de « principe du maximum ». …

Bien souvent, la pensée obéit à l'extrémalité de façon inconsciente. C'est presque d'un mouvement naturel qu'elle a cherché à définir le nombre minimal d'éléments qui engendrent un objet structuré donné ; la notion de base [par exemple] [nombre minimal de générateurs] n'a pas eu de difficulté à s'imposer. …[La] méthode axiomatique est inhérente à l'esprit humain et révèle [également] l'extrémalité qui la gouverne [: la pratique de cette méthode met en effet en avant le plus petit nombre de données possibles faisant l'objet d'un consensus, et dont on élabore les conséquences]. …

L'extrémalité se découvre encore quand le mathématicien recherche des propriétés « denses », « génériques », qui ont cette qualité remarquable d'être presque *partout* vraies. Elles occupent donc la position hiérarchique la plus élevée dans l'ordre de l'étendue de vérité des propriétés définies sur un certain espace topologique … .

VI. 2 La bifurcation et la restructuration

maximas mutationes faepe quidem tam brevi fieri temporis momento, ut fenfibus nullo plane modo percipi possunt, determinandas tamen effe ad singula puncta, tum ut motus animo recte percipiatur, tum quia exinde varia deduci poffunt Theoremata.

Daniel BERNOULLI ([5], p. 6)

VI.2.1 *L'idée de bifurcation*

La notion de bifurcation est une des plus récentes notions dégagées par les mathématiciens et dont la signification est des plus intéressantes. Nous allons voir que *les lieux de bifurcation sont des ensembles singuliers et donc rares, en lesquels le milieu, déstructuré par rapport à ses voisins, est donc chargé de potentialités de développement, et par lesquels la transition entre structures différentes s'accomplit en général de manière extrêmement rapide.*

C'est en somme ce qu'avait compris Daniel Bernoulli en 1738, l'étonnante citation donnée en exergue à cet paragraphe en témoigne.

L'exemple le plus simple qu'on puisse donner d'une bifurcation relève encore de l'observation des paysages montagnards : nous voyons d'abord l'alpiniste grimper pour atteindre un sommet, d'où ensuite il redescend : il était sur une pente ascendante, le voici maintenant sur la pente descendante, et ce changement, cette bifurcation dans la nature de la pente, changement essentiel, survient en ce seul point singulier qu'est le sommet. Notre alpiniste, voûté, sac à dos plein, avançait à pas lent, soufflait, transpirait à grosses gouttes, et voici que, soudain, son pas devient alerte, sa marche joyeuse. La bifurcation physique de la géographie a ici pour corollaire la bifurcation physiologique et psychologique de l'état de notre alpiniste.

Plus généralement, la bifurcation décrit un changement immédiat de forme, d'état ou de comportement entraîné par la variation de paramètres distincts des variables d'état. Nouveauté de la forme, de l'état, du comportement : la bifurcation mathématique est un outil permettant de comprendre la genèse et la fin des choses.

Les approches de la stabilité faites par Lagrange et Laplace se réfèrent à cet outil. Nous avons vu qu'ils considèrent tous deux une ellipse un peu épaissie dont ils étudient la stabilité (cf la figure 2) : le grand axe étant parallèle au sol sur lequel elle est posée, elle est stable ; lorsqu'on la retourne de manière que ce grand axe soit maintenant perpendiculaire au sol, sa position est instable. On pourra comparer, de façon plaisante, la première de ces situations avec celle d'une première personne se prélassant dans l'herbe, allongée sur le ventre, et la seconde avec celle d'un seconde personne, en somme marchant sur la tête. Si θ désigne l'angle du grand axe avec le sol, la variation de à 0 à 90 degrés de ce paramètre angulaire fait passer de l'état de stabilité à l'état contraire : il y a bifurcation, un terme qui apparaît dans la langue française en 1560 à propos d'anatomie, mais que nos auteurs n'emploient pas encore.

On peut donner une autre présentation de cet exemple, un peu plus précise, en faisant apparaître ce qu'on peut appeler ici les *paramètres de forme a* et *b* de l'ellipse. L'équation qui la définit s'écrit :

$$ax^2 + by^2 = 1$$

Les paramètres de forme de l'ellipse sont des nombres positifs. On peut les représenter par un point du premier quadrant d'un plan, *a* étant placé en abscisse, *b* en ordonnée – on peut aussi introduire un paramètre de forme réduit,

$$f = \frac{a}{b}$$

et examiner la forme de l'ellipse quand *f* parcourt l'ensemble des nombres réels, on peut également remplacer les ellipses par des rectangles.

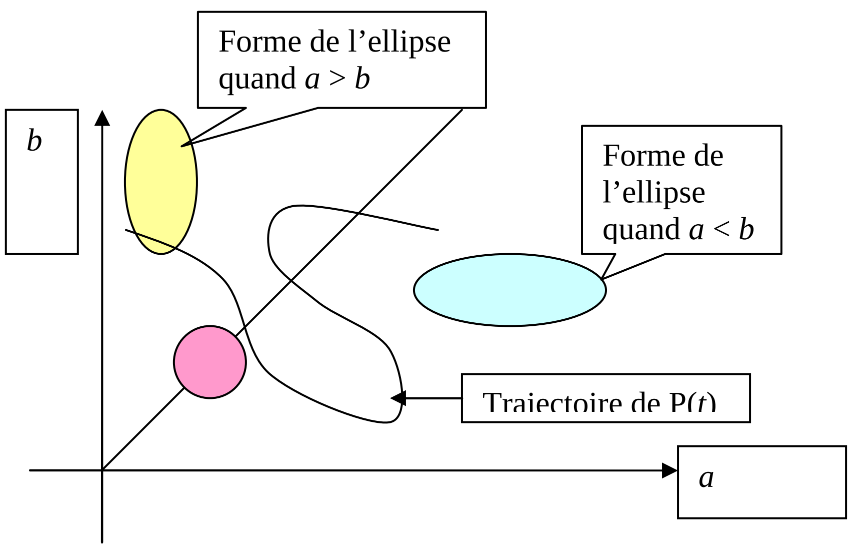


Figure 2

La figure ci-dessus fait voir la *forme* de l'ellipse selon que a est supérieur ou inférieur à b. Le lieu des points où se produit l'égalité des paramètres (f = 1) est la bissectrice du quadrant : l'ellipse est alors un cercle, une forme singulière rare dans l'univers infini des formes elliptiques, forme parfaite au sens de Platon, caractérisée par l'équilibre, l'égalité entre un grand axe et un petit axe. Ce lieu que nous venons de rencontrer est le *lieu singulier*, le *lieu critique*, *l'ensemble de bifurcation*, dont l'aire a une mesure nulle, alors que les aires des domaines où les valeurs des paramètres sont inégales sont de mesure infinie.

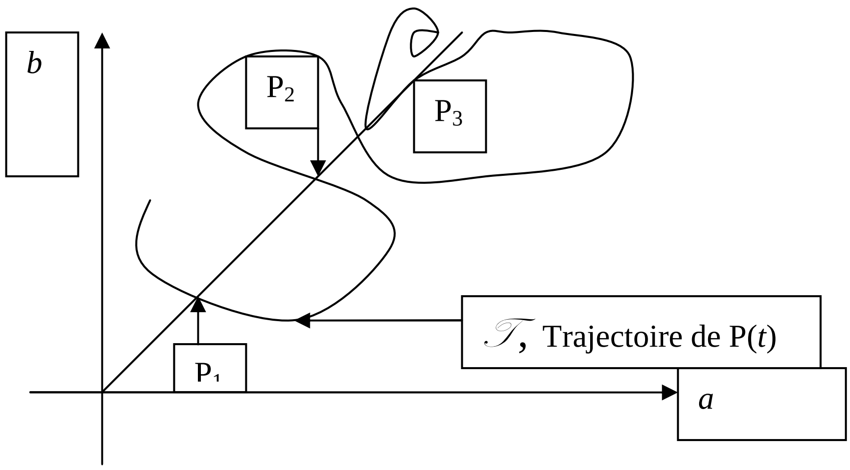


Figure 3

Si le point représentatif de la forme P(t) = ($a(t)$, $b(t)$) se déplace dans le plan, sa trajectoire $\mathscr{T}$ n'aura pas en général de segment commun avec le lieu singulier, et le coupera en des points bien distincts : sont représentés, dans la figure ci-dessus, deux tels points distincts P_1 et P_2 en lesquels la trajectoire est transverse au lieu de bifurcation, ainsi qu'un point P_3 au voisinage duquel il n'y a plus transversalité, la trajectoire et le lieu singulier ayant une petite partie commune. La traversée de ce lieu s'accompagnera d'un changement de forme qui peut être soudain, important, brutal. Et si de plus, l'un des paramètres devenait négatif, alors l'ellipse muterait en une hyperbole, une vraie métamorphose.

Une durée, aussi faible soit-elle, est nécessaire pour que s'accomplisse une transformation structurelle compliquée. Dans ces cas, la trajectoire représentative de l'évolution vient longer le lieu de bifurcation, peut lui être tangent, se fondre un moment en lui : la transversalité géométrique s'efface alors.

Un exemple physique qui étend le cas de l'ellipse que nous venons de rencontrer a été donné en 1834 par Gustav Jacobi (1804-1851), dans son étude, déjà entreprise par Newton, de la forme d'une masse fluide incompressible en rotation, maintenue en équilibre par le seul jeu des forces gravitationnelles internes. Jacobi trouve que, pour les valeurs supérieures à une valeur critique t_c d'un paramètre de forme t défini comme le rapport

$$\frac{\text{Energie cinétique de rotation}}{\text{Energie potentielle de rotation}}$$

la forme de la masse fluide est celle d'un ellipsoïde à trois axes inégaux.

L'introduction du terme bifurcation, à travers les expressions qu'il emploie, « bifurcation de voies », « points de bifurcation », « bifurcations d'intégrales », « lieux de bifurcation », semble revenir à Joseph Boussinesq. En 1878, celui-ci publie un mémoire sur la *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale* [9] ; en 1879, il commente ce mémoire dans une publication intitulée *Etude sur divers points de la Philosophie des Sciences* [10].

> Que présentent de particulier, pour le mécanicien géomètre, ces curieux systèmes matériels qu'on appelle des organismes vivants ? Si la vie, à ses divers états, est la manifestation d'un principe directeur spécial[16], comme l'affirme le bon sens et comme l'admettent Berzélius, Claude Bernard, Cournot, etc, comment ce principe directeur peut-il présider à la formation des organes et influer sur leurs mouvements sans créer ni détruire aucune énergie, sans disposer même d'aucune force proprement dite, mécanique, physique ou chimique, évaluable en poids ou par son travail, comme

[16] Un des lecteurs précédents du texte que j'ai eu entre les mains avait souligné « principe directeur spécial ».

> l’ont conclu de leurs expériences les plus grands physiologistes et chimistes contemporains ? Telle est la question abordée dans ce mémoire de 1878. J’y en indique, et en développe pour les cas les plus simples, l’unique solution, constituée par des bifurcations de voies, c’est-à-dire par la multiplicité des intégrales qu’admettent dans des circonstances singulières, à partir d’un même état initial, les équations différentielles du mouvement de certains systèmes matériels. En effet, …

Selon Boussinesq, la Nature, sans que nous puissions véritablement dire par quels truchements, selon un principe bien à elle, déterminerait le choix de la trajectoire que suivra le système.

C’est, sous l’influence de Thomson et Tait, en reprenant ce problème de Newton-Jacobi dans son article paru en 1885 *Sur l’équilibre d’une masse fluide animée d’un mouvement de rotation*, que le terme « bifurcation » apparaît pour la première fois sous la plume de Poincaré ; il utilise plus précisément l’expression « *forme de bifurcation* » :

> Il pourra d’ailleurs arriver qu’une même forme d’équilibre appartienne à la fois à deux ou plusieurs séries linéaires. Nous dirons alors que c’est une *forme de bifurcation.*

Il n’est pas impossible qu’un exemple donné par Poincaré dans cette étude ait conduit Thom sur la voie de la définition du déploiement universel de sept polynômes particuliers. Poincaré dit avoir été influencé par l’observation du réseau ferré, Thom reprendra le même récit ; il n’est pas interdit de penser que Boussinesq, qui voyageait assez souvent entre Lille et Paris, ait également emprunté la terminologie au langage ferroviaire, et que Poincaré se soit souvenu des écrits de Boussinesq. Le traitement par Poincaré de la bifurcation est bien différent de celui de Boussinesq : comme le montrent deux exemples fort simples, la bifurcation est l’effet de légères modifications contrôlées des données locales qui dirigent le devenir des systèmes.

Le développement de la radioélectricité à travers la mise au point des oscillateurs, tant dans ses aspects techniques que théoriques, va permettre de mettre en lumière le rôle joué par les phénomènes de bifurcation. Ont déjà été mentionnés les travaux de la grande école russe. La première extension à la biomédecine des travaux entrepris sur les oscillateurs électroniques push-pull sera faite par Van der Pol [48][49] : ses équations de l'oscillateur et du battement cardiaque feront l'objet de très nombreux études et développements (Elie et Henri Cartan (1904-), Alfred-Marie Liénard (1869-1958)).

On y rencontre un phénomène de bifurcation déjà décrit par Poincaré, mais qui sera explicité de manière analytique par Eberhard Hopf (1902-1983) [25], et dont la technique basée encore sur la linéarisation sera largement reprise par la suite.

La notion de point singulier s'étend de manière naturelle en celle d'un ensemble de points invariants au cours du temps, et que l'on appelle parfois un *attracteur*. Il représente en quelque sorte la finalité d'une évolution. Par exemple une trajectoire est un ensemble globalement invariant : l'évolué de tout point de l'ensemble est encore un point de l'ensemble. Celui-ci n'est pas forcément un attracteur. Il faut en plus pour cela qu'au voisinage de cette trajectoire viennent mourir d'autres trajectoires. Le phénomène de bifurcation de Poincaré-Hopf est simplement le déploiement d'un point singulier attractant (tore de dimension nulle) en une trajectoire attractante fermée sur elle-même, un cycle attractant (tore de dimension 1).

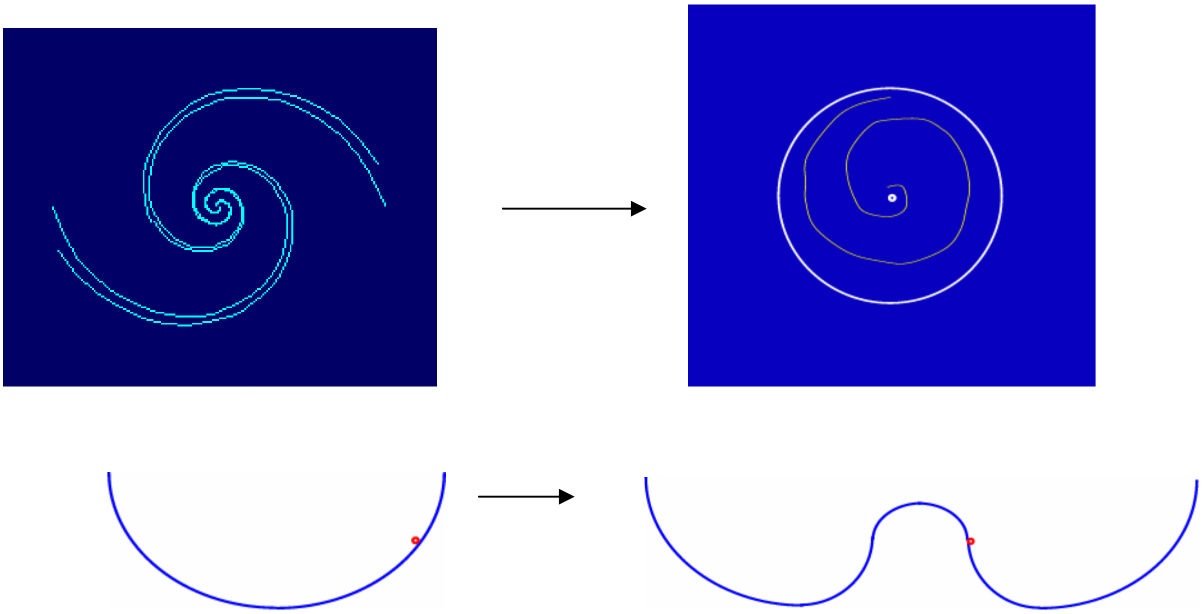


Figure 3 : Bifurcation de Poincaré-Hopf

La bille rouge tombe au fond de la coupelle, éventuellement en rotation autour de son axe

qui est déformée au cours de la bifurcation tout en continuant son mouvement de rotation

Au moment de la bifurcation, se produit un phénomène mathématique sur la signification duquel on n’a pas assez prêté attention.

VI.2.2 *Déstructuration et restructuration*

Les phénomènes de dédifférenciation-différenciation sont bien connus des embryologistes, ceux de destructuration-restructuration sont fréquemment évoqués par les économistes (Karl Marx (1818-1883), François Perroux (1903-1987)), par les historiens (Arnold J. Toynbee (1889-1975)), voire par les artistes (René Huyghe (1906-1997) à propos de Picasso (1881-1973)). Du point de vue conceptuel, l’étude de tous ces phénomènes relève de la théorie de la bifurcation.

Il arrive en effet également que, pour des valeurs singulières des paramètres qui les définissent, des objets mathématiques en évolution présentent des formes *transitoires de déstructuration, de dégénérescence. Ces objets connaissent alors une modification de leur structure interne.*

Ces dégénérescences correspondent à des situations physiques très naturelles dans la mesure où la structure d’un objet ne saurait être modifiée sans passer au préalable par une phase au cours de laquelle cette structure puisse être partiellement déstabilisée, voire dissoute.

Une telle phase ne peut être que transitoire, car l'objet perd des qualités de stabilité immédiate, et pourrait disparaître à trop s'attarder dans un état de faiblesse apparente.

Il acquiert par contre des potentialités supplémentaires dans le sens suivant : au moment où est franchi le lieu de bifurcation, une ou des variables y_i autrefois pertinentes deviennent momentanément muettes, ou, à un moindre degré, tout en restant présentes, perdent ce caractère de variable essentielle. Lorsqu'elles deviennent muettes, les coefficients qui les affectent prennent la valeur nulle. On peut dire qu'elles sont en quelques sorte supprimées par annihilation. Elles ne pèsent pendant un instant d'aucun poids sur la structure de l'objet. Elles n'en restent pas moins potentiellement présentes, et peuvent resurgir, retrouver un rôle structurel nouveau au sein d'une architecture différente, au cours de bifurcations ultérieures. On peut même envisager des situations où des variables potentiellement présentes dès l'origine n'aient jamais été exprimées avant l'apparition de bifurcations guidées par d'autres transformations internes et/ou par des évolutions de paramètres exogènes. Trivialement par exemple, la fonction

$$g(x_1, x_2) = a\,x_1$$

devient, lorsque *b* quitte la valeur nulle,

$$g(x_1, x_2) = a\,x_1 + b\,x_2.$$

Sans aller jusqu'à l'annihilation, la perte de pertinence advient également lorsque la variable perd de son caractère d'indépendance, et devient vassale d'autres variables ; la liaison est linéaire dans les cas les plus simples. Dans ces cas, il y a perte de la richesse structurelle.

Cet exemple classique d'une situation fort simple illustre bien l'essentiel de ce propos. On considère une évolution d'un ensemble de propriétés y_i ; la vitesse d'évolution $\frac{dy}{dt}$ de ces propriétés est supposée connue :

$$\frac{dy}{dt} = F(y, a)$$

où a est un paramètre. Une technique générale d'étude consiste à linéariser F, de sorte qu'en première approximation, les vitesses évoluent selon la loi linéaire :

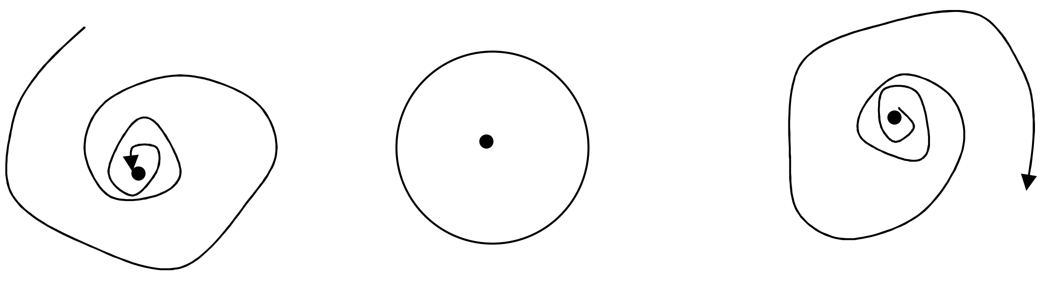
$$\frac{dy}{dt} = M(a)\, y.$$

On se place dans le cas où l'ensemble de propriétés se réduit à deux éléments : y_1 évalue par exemple le degré de liberté d'expression, y_2 mesure le degré de satisfaction matérielle, et a évalue le degré de rigidité de la société : a est positif dans une société rigide, il est négatif dans une société souple. On suppose que :

$$\frac{dy}{dt} = M(a) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Selon le signe de a, aux solutions de cette équation sont associées des trajectoires ayant les formes suivantes :

$a < 0$ | $a = 0$ | $a > 0$



M(a) est somme d'une matrice de rotation et d'une matrice d'homothétie négative	M(a) est simplement une matrice de rotation	M(a) est somme d'une matrice de rotation et d'une matrice d'homothétie positive

Figure 4

Le vecteur vitesse en un point est somme d'un vecteur vitesse « circulaire » et d'un vecteur vitesse « radiale » qui ramène ($a < 0$) le mobile vers l'origine, ou l'en éloigne ($a > 0$). Le lieu de bifurcation se réduit ici à l'origine de la droite réelle.

Dans tous les cas, l'entité considérée connaît une modification locale de ses degrés de libertés, de sa capacité apparente d'autonomie vis-à-vis de son environnement. De fait, *elle acquiert, au moment de la bifurcation, des potentialités plus élevées, rejoignant un état de totipotence primordial*.

Si, durant la phase de stabilisation, un agent extérieur, ou endogène, pèse davantage que les autres sur l'évolution du système, cet agent pourra conduire rapidement cette évolution vers l'apparition d'une une nouvelle morphologie associée à une structure différente, plus stable, mieux adaptée aux conditions nouvelles de l'environnement, et mathématiquement représentée par un nouvel attracteur du système. Il semble que la plupart des mécanismes épigénétiques locaux s'insèrent dans ce schéma conceptuel général.

On devine ici qu'hormis les cas simples de la physique, la considération de l'énergie est une donnée insuffisante pour établir le devenir d'un objet complexe comme un être biologique. L'évaluation de ses degrés de stabilité et de potentialités selon les paramètres et les contraintes en présence sont sans doute quelques-unes des données qui pourraient permettre d'avancer dans la prévision des lendemains.

VI.2.3 *La rupture de symétrie en tant que bifurcation*

La présence de symétries est un indicateur d'un équilibre des jeux de forces internes et externes qui affectent un objet. Les symétries se structurent en groupes, et le groupe des symétries d'un objet est de quelque manière associé à la stabilité de l'objet, et à l'ensemble de ses propriétés.

Se présentant, parfois, sous l'apparence de *défauts*, comme il arrive dans les cristaux liquides, c'est en des singularités, notamment celles associés aux groupes de transformations dépendant de paramètres, qu'apparaissent les bifurcations de l'état de la matière, les modifications dans les morphologies, les ruptures de symétrie, les dégénérescences dans les spectres de valeurs propres. A partir de ces singularités, qu'elles soient isolées ou bien rassemblées en lieux critiques et de bifurcation, peuvent se produire les changements dans les propriétés des groupes de symétrie, des déploiements de ces groupes, ou, au contraire, leur contraction en certains de leurs sous-groupes.

En physique, les plus connues de ces brisures de symétrie sont celles de Goldstone qui accompagnent de la naissance de particules de masse nulle, et celles de Higgs qui, au contraire, donnent naissance aux particules massives[17].

Si, à un moment donné, advient une restructuration d'un objet, il est nécessaire, pour qu'il ne perde pas son identité, que des éléments fondamentaux de structure soient conservés, ainsi, par conséquent, que quelques-uns des éléments de symétrie de la structure antérieure. Ces éléments encore présents doivent encore former un groupe qui reflète l'équilibre du nouvel objet. Ce groupe H_i est contenu dans le groupe initial G, en forme un sous-groupe. On dispose ainsi, associés aux différents états possibles des objets, de chaînes[18] de sous-groupes, $0 \subset \ldots \subset H_i \subset \ldots \subset G$, 0 désignant le sous-groupe restreint à l'élément neutre. La mort étant considérée comme la situation hélas la plus stable, on considérera, ici, que la réduction d'éléments de symétrie accroît les potentialités de stabilité de l'objet.

---

[17] On trouvera dans les textes de Witten par exemple, l'analyse de plusieurs comportements de bifurcation ou de non bifurcation dans les domaines de la physique théorique. (Edward WITTEN *Dynamics of quantun filed theory* (*Lecture 1 : Symmetry Breaking* pp. 1121-1146, *Lecture 2 : Gauge Symmetry Beaking and More on Infrared Behaviour*, pp. 1147-1157) in *Quantum Fields and Strings : a course for mathematicians*, Pierre Deligne, Pavel Etingof, Daniel S. Freed, Lisa C. Jeffrey, David Kazhdan, John W. Morgan, David R. Morrison, Edward Witten eds, vol.2, Am. Math . Soc., Providence R.I., 1999).

[18] En physique des particules, plus précisément, on fait appel à la suite : $U(1) \times SU(2) \times SU(3) \subset SU(5) \subset SO(10) \subset E(6) \subset \ldots$

VI.2.4 *Sur l'inventaire et l'emploi des formes de bifurcation*

Les phénomènes de bifurcation présentés dans les paragraphes précédents sont parmi les plus élémentaires. Il existe bien des variantes et des raffinements dans les mécanismes qui se mettent en place. Il peut arriver par exemple qu'une bifurcation apparaisse alors que deux cycles parcourus à des vitesses différentes se rapprochent : un phénomène de turbulence local prend d'abord naissance lorsque est franchi un certain seuil de proximité entre les deux cycles ; selon les cas, un des cycles, ou les deux, peuvent très rapidement s'évanouir.

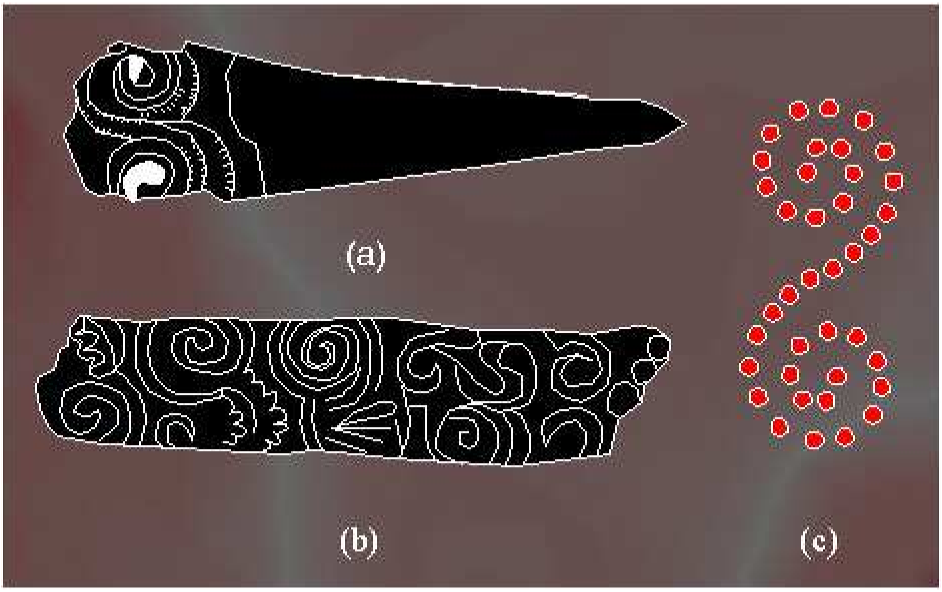
Il est de nombreuses situations pratiques où l'on peut se contenter d'examiner la manière dont varient les propriétés y dépendant de variables d'état x, en fonction des seules perturbations d'un ensemble de paramètres a :

$$y = f\,(x, a).$$

On a alors été amené à envisager, selon les modèles mis en œuvres, différents types de bifurcation que l'on peut qualifier de statiques : bifurcation simple, avec uni- ou multi- imperfection, séquentielle, équivariante (Louis Michel, Martin Golubitski). On peut inclure ces différents types au sein de l'étude plus large des bifurcations dans les systèmes dynamiques. Ces bifurcations sont tellement nombreuses et variées, qu'il n'est pas possible d'en établir une classification relativement élémentaire. De nouvelles formes d'ensembles de bifurcation apparaissent au fur et à mesure que sont enrichis notamment dans leur dimension les modèles mathématiques. Cette diversité reflète la richesse des morphologies naturelles, est en conformité avec la mise en évidence de bifurcations dans tous les ordres de la nature.

Il semble qu'il y ait cependant quelques formes de bifurcation archétypes, plus fondamentales que d'autres. Une des premières est sans doute la bifurcation par explosion que l'on voit parfois dans les feux d'artifice : un point singulier isolé se déploie de manière uniforme en trajectoires dans toutes les directions : « De l'un jaillit le multiple » disait déjà Empédocle.

Cependant très rapidement, sous l'influence peut-être de la flèche du temps, de la chiralité inhérente à la nature, ces trajectoires s'infléchissent : le dessin qui s'impose alors montrant la morphologie de l'ensemble des trajectoires est celui associé à la bifurcation de Poincaré-Hopf. Ne le retrouve-t-on pas si fréquemment dans les dessins d'enfants, dans les gravures et dans les motifs de décoration les plus anciennement connus ?



Eléments de poterie archaïque
(image trouvée sur la toile)

Il est une autre bifurcation, encore plus élémentaire que les deux précédentes. Il s'agit de la bifurcation simple associée aux deux formes de la fourche et représentée sur la figure 1 : du point singulier donné, ne partent que deux voies. Cette figure symbolise à mes yeux l'ambiguïté profonde qui imprègne le monde, ce mélange d'amour et de haine, de souffrances et de joies, de laideur et de beauté, souvent tous issus d'une même source, les bonnes intentions qui peuvent paver l'enfer, les erreurs, ces maux affaiblis dont l'analyse peut être source de progrès.

Dans les modèles relevant de la théorie des catastrophes[19], déjà évoquée dans le précédent chapitre (§ II.3.3), on utilise la bifurcation simple et celle de systèmes gradients, aussi bien en physique (optique où la réussite est parfaite, mécanique, transitions de phase, hydrodynamique), qu'en biologie (entre autres, embryologie, radiologie, fibrinolyse, membranes cellulaires), que dans l'étude des comportements sociaux et individuels (comportements bi-modaux, empreinte, accoutumance versus désaccoutumance, apprentissage, décision et comportements du marché), qu'en linguistique (classification des verbes, ambiguïté). Bien sûr, la bifurcation est présente dans les domaines innombrables où apparaissent des seuils de tolérance, des ruptures brutales, des morphologies et des comportements nouveaux.

En conclusion de ce paragraphe III.3, j'emprunterai à la publication [13] cette considération sur le devenir en biologie :

> La soudaineté de l'apparition d'espèces animales dotées de dispositifs physiologiques apparemment entièrement inconnus jusqu'alors, l'absence [parfois] totale de formes transitoires, l'étrangeté des métamorphoses, sont quelques-uns des problèmes que les théories classiques de l'évolution restent incapables d'expliquer. L'ouvrage de Denton sur ce sujet fait de manière remarquable le point sur les questions à résoudre – encore qu'il exprime parfois des opinions trop tranchées pour être entièrement exactes et qui faussent le débat, comme celles-ci : « La biologie entière d'un organisme, l'ensemble de ses traits anatomiques sont fondamentalement réductrices à ses protéines constitutives » ! Où est l'architecture dynamique de l'être vivant ?
>
> La théorie des systèmes dynamiques offre un début d'intelligence de ces phénomènes d'évolution, au moins sur le plan des principes directeurs.
>
> En premier lieu, il est clair, au moins pour un nombre croissant de chercheurs, qu'une vue locale des mécanismes physiologiques ne permet en aucune façon de comprendre leur genèse, ni même parfois leur fonctionnement, d'où certaines erreurs et aberrations médicales douloureuses… L'être vivant est une totalité qui évolue au sein

[19] Le terme de « catastrophe » a été proposé par Christopher Zeeman (1925-) et adopté par Thom.

d'une totalité plus vaste. L'ensemble forme un énorme système dynamique dont les attracteurs symbolisent la nature et le comportement des états des constituants des objets, et qui sait conserver une mémoire du passé dont l'influence sur le présent n'est pas assez prise en compte.

Les interrelations introduisent des couplages entre ce qui peut parfois être considéré localement comme des variables d'état et des paramètres de bifurcation. Le phénomène de la pléiotropie, un traumatisme effectué sur un gène a des conséquences sur des parties de l'être vivant qui paraissent indépendantes du gène touché, constitue un preuve supplémentaire de l'existence de cet entrelacs d'interrelations. L'évolution des paramètres de bifurcation guide partiellement au moins celle des variables d'état. Lorsque des bifurcations se produisent, d'énormes pans d'attracteurs peuvent soudain s'effondrer, entraînant de multiples restructurations, tant sur le plan morphologique, que physiologique et fonctionnel. Comme on l'a vu, ces périodes de restructurations ont un caractère transitoire très marqué. La métamorphose est typique à cet égard. Ces lignes avaient déjà été écrites avant que je tombe sur celles-ci, de Denton[20] : « Le premier stade de la métamorphose, qui succède rapidement à la formation de la chrysalide, équivaut pratiquement à la dissolution de tous les systèmes organiques de la larve, en une véritable soupe de cellules et de tissus fragmentés. Cette phase de dissolution est rapidement suivie par une phase d'assemblage durant laquelle les systèmes organiques – musculaires, nerveux et digestifs – de l'insecte adulte sont élaborés à partir de cellules embryonnaires spéciales… »

Les structures intermédiaires, peu stables, aux potentialités élevées comme nous l'avons vu, ne pouvaient guère, la plupart du temps, laisser de trace significative. Pour résister aux épreuves de la variation possible du milieu (températures, pressions, degrés hygrométriques), à celles des cataclysmes naturels, voire des simples intempéries, aux dangers et aux coups des prédateurs multiples, un minimum de stabilité est évidemment nécessaire. Un même phylum peut, quand certaines conditions sont réunies, bifurquer en plusieurs embranchements, dont les caractères d'adaptation à l'environnement, les réalisations fonctionnelles internes (par exemple la composition de l'hémoglobine) peuvent être radicalement différentes. Sur le plan conceptuel, il n'y rien, là, de surprenant.

[20] M. DENTON, *Evolution, une théorie en crise*, Londres, Paris, 1988

L'évolution écologique de notre planète suscite bien des craintes. Je les partage certes, mais de manière ambiguë, je les observe avec intérêt : il pourrait en résulter, en peu de temps, au moins quelques bouleversements des morphologies sociales et économiques. Si nous n'avions ni imprimerie, ni film, ni cassette diverse, l'histoire future n'aurait jamais eu accès à la connaissance détaillée de cette période. L'évolution de la composition de notre atmosphère aura été le fait de deux centaines d'années. Peut-être en résultera-t-il des effets biologiques. Nous n'avons pas les moyens, au moins aujourd'hui, de connaître ni même de déceler, un changement d'environnement accompli pendant 200 ans, des centaines de millions d'années en arrière. Il est possible donc que la reconstitution des transformations, qui, dans le passé, ont affecté le monde vivant, soit une utopie. Cette difficulté n'affecte en rien la validité du schéma conceptuel offert par la théorie. Je parie même qu'un jour viendra où l'homme sera capable de le mettre en œuvre, dans le domaine de la vie, sur le plan expérimental. Souhaitons, sans hélas beaucoup d'illusion, que ce soit pour le bien de ce qui sera alors le vivant.[21]

[21] On sait que, dans trois à quatre milliards d'années, l'évolution de l'étoile solaire finira par brûler la terre. Le phénomène humain doit donc se transformer en profondeur s'il veut acquérir quelque pérennité. Toute l'évolution des connaissances et des techniques (s'évader dans l'espace, se réduire à quelques molécules peu sensibles aux effets des rayons cosmiques, acquérir un statut « virtuel » et abstrait) vise à lui permettre d'atteindre à cette pérennité.