Chapitre V

LA STABILITÉ DANS SON ACCEPTION CLASSIQUE

There is scarcely any question in dynamics more important for Natural Philosophy than the stability or instability of motion.
Thomson & Tait ([47], 346)

Les objets n'existent que pour autant ils présentent des propriétés de stabilité. Le phénomène universel de la mise en place de la stabilité est encore mal compris.

De manière un peu schématique et dans le monde physique, la stabilité se présente sous deux formes, l'une absolue, l'autre relative.

L'invariabilité caractérise la forme absolue de la stabilité. Elle a, de tout temps, été prise en considération. Dans le monde physique, elle s'exprime à travers l'énoncé de lois universelles, de principes de conservation. Dans le monde symbolique, notamment des mathématiques, elle se traduit d'abord par la recherche et par la mise en exergue d'invariants divers, associés à des énoncés partout ou presque partout vrais.

La stabilité au sens ordinaire est la forme relative de cette notion. Elle intéresse l'humanité à travers entre autres l'avenir du système solaire, sur lequel les chercheurs ont commencé à se pencher au dix-huitième siècle. Les progrès de l'astronomie et dans la recherche des causes des mouvements conduisent à effacer de l'esprit la croyance en un monde rigide, fixe, immuable. Dans ce cadre, Lagrange entreprend le premier un examen assez général des conditions analytiques de stabilité. Ces conditions seront pleinement développées par Liapounoff à la fin du dix-neuvième siècle, et raffinées par la suite, surtout après les apports de Poincaré. Si, au départ, on traite de la stabilité de position, celle des points singuliers, des points d'équilibre, on en vient rapidement à examiner la stabilité de trajectoires et d'ensembles de trajectoires, d'objets formels : s'introduit alors de manière naturelle, en 1937, la notion de stabilité structurelle.

L'étude de la stabilité relative dans le monde symbolique des mathématiques se développe également à la fin du dix-neuvième siècle, lorsque apparaissent des propriétés qui ne sont que presque partout vraies. Ce chemin de la pensée conduit à la définition récente de la notion de prévalence.

La présence de symétries est l'une des manifestations extérieures de la stabilité, parmi les plus visibles. Chaque objet possède des jeux de symétrie interne plus ou moins extériorisés. Les transformations qui respectent des symétries forment des ensembles auxquels on a donné le nom de groupes. Ces groupes sont différents selon le régime de symétries qu'ils représentent. Passer d'un groupe à un autre, par bifurcation selon les uns, par brisure de symétrie selon les autres, peut refléter un changement de nature. Les physiciens utilisent ce langage pour décrire l'univers des particules.

Ces études font apparaître un certain nombre de concepts importants inséparables de celui de stabilité : ce sont les concepts de singularité, d'extrémalité, de bifurcation. Les lieux de bifurcation sont du plus grand intérêt pour la connaissance des modifications de structures et de morphologies.

Platon est le premier philosophe connu pour avoir énoncé le principe selon lequel tout objet s'efforce de conserver sa stabilité spatiotemporelle, principe métaphysique qui semble jouer un rôle dominant comme moteur de l'évolution et de la structuration des objets de l'univers.

V.0 Introduction

« Ces électrons occupent des états quantiques tels que le « nuage électronique » autour du noyau atomique a une symétrie sphérique. Les calculs démontrent que cette structure électronique est extrêmement stable : l'énergie est inférieure à celle de toute autre configuration. »

« Les satellites de la série TIROS tournaient sur des orbites situées entre 700 et 900 kilomètres d'altitude et fournissaient des images de la surface de la Terre avec une précision d'environ un kilomètre. Ils étaient stabilisés par spin – en tournant sur eux-mêmes – si bien que la caméra n'avait pas la Terre dans son champ de vision en continu »

« A basse altitude, jusque vers 1800 mètres environ, le manteau neigeux contient des couches humides et consolidées par regel. Sa stabilité est donc assez bonne. »

« Processus de stabilisation des cristaux liquides en biologie»

« Vladimir Poutine, qui a inauguré l'Année de la Russie en Chine, s'est d'ailleurs inquiété du caractère « *instable* » de la relation commerciale sino-russe »

« Il en ressort que des travaux épidémiologiques de qualité et convergents montrent la grande stabilité de ces troubles pendant l'enfance et l'adolescence et le risque de marginalisation grave à l'adolescence avec désocialisation, échec des apprentissages, violence à l'égard d'eux-mêmes et des autres. »

« L'instabilité de la vie au travail appelle la construction de nouvelles trajectoires sociales »

« La stabilité politique du Bénin est mise en cause par un conflit sur le calendrier électoral ».

Ces quelques citations à la Prévert, trouvées presque toutes dans les journaux quotidiens et dans les grandes revues de vulgarisation scientifique, témoignent de l'universalité d'emploi de la notion de stabilité.

Est dressé d'abord, dans ce chapitre, un historique *ramassé* sur les formes de conceptualisation de cette notion. Il ne s'agit pas bien sûr ici de dresser un historique exhaustif et détaillé sur le plan mathématique ; mais peut-être les spécialistes trouveront-ils parfois dans ce texte des compléments à leur propre étude. On observera ici en premier lieu que la conceptualisation de la notion de stabilité fut d'abord le fait de ceux qu'on appelait autrefois les « géomètres », et qui n'étaient pas simplement « mathématiciens ».

L'invariance est l'une des formes de la stabilité qui joue également un grand rôle en physique et en mathématiques : elle est désignée ici sous le vocable de stabilité absolue, en opposition à la forme relative de stabilité qu'est la stabilité ordinaire.

Les deux formes de stabilité partagent le même cortège de concepts attenants – singularité, extrémalité, bifurcation – d'un intérêt tout particulier pour la compréhension des phénomènes. Je m'attarderai en particulier sur celui si important de la bifurcation, entrevu à la fin du dix-neuvième siècle seulement. Ce paragraphe s'appuie en grande partie sur trois textes parus il y déjà quelques années [12], [13], [14].

J'insiste enfin sur le caractère fonctionnel du concept de stabilité : il lui confère une dimension métaphysique et une capacité d'implications rarement prises en compte.

V.1 La stabilité (relative) : le concept et le terme au cours de l'histoire

L'émergence véritable du concept de stabilité est *récente*. Dans les temps anciens, comme pendant la période protégée de l'enfance, la prise de conscience des fluctuations du monde n'imprègne pas encore la pensée. Le monde est immuable : la notion de stabilité absolue correspond à cette permanence. Il faudra attendre le développement de l'astronomie, la formalisation de la mécanique par Lagrange, les constructions artificielles de l'homme, leur lot de défaillances et d’échecs immédiats, pour que, petit à petit, la prise en considération de la stabilité, qualifiée ici de relative, devienne indispensable, que la notion prenne corps, se précise, et fasse l’objet de travaux conséquents. Elle sera formalisée dans le cadre de la représentation du monde physique, et c’est dans ce cadre que nous allons nous maintenir dans ces premiers paragraphes.

Le terme « stable » apparaît certes, parfois, dans les écrits de Platon (cf le chapitre suivant) ou d’Aristote, mais non, m’a-t-il semblé, chez les philosophes et savants qui les ont précédés. Platon et Aristote auront longuement disserté sur le mouvement. Mais n’étant point expérimentateurs, ayant toujours admiré la merveilleuse course des astres dans le ciel étoilé, l’étude de la stabilité des mouvements ne leur est point apparue nécessaire.

L’œuvre de nos deux grands philosophes restera souveraine jusqu’à Galilée : le contenu du *Dialogo* atteste de la connaissance que Galilée a de Platon, et surtout, l’ampleur des références à Aristote témoigne de la place de premier plan qu’on lui accordait encore.

Cependant, chez les mécaniciens comme pouvait l’être Leonardo da Vinci, apparaît la préoccupation liée à l’instabilité. Dans son *Trattato della Pittura* [49], le CAP. CCLXIII, ayant pour titre *Ponderatione de corpi che non si muovono* (Pondération des corps qui ne bougent pas), commence par ces mots :

> Le ponderationi overo bilichi degl’huomini si dividono in due parti, cioè semplice, e composto (La pondération ou équilibre instable des hommes se divisent en deux parties, à savoir la simple et la composée).

Galilée, avons-nous rappelé, était aussi féru de construction navale et de mécanique. Au cours de la première journée de son *Dialogue* [23], en fin du paragraphe 17, il fait tenir à Salviati ce propos qui renvoie à Platon :

> Or, pour pouvoir bâtir résolument, il faudrait que les premiers principes et les fondements soient assurés, fermes et stables

« fermes et stables », nous retrouverons quelques lignes plus loin ces deux adjectifs sous une autre signature. Le terme « stabilité » apparaît dans cette traduction dans les seconde et quatrième journée du dialogue : le contexte laisse entendre qu'il est employé dans le sens d'immobilité. Mais l'introduction par Galilée, en fin de la quatrième journée, de ses remarques sur les effets de petites variations des données est des plus intéressantes à ce sujet.

Les termes « stabilité » ou « instabilité » n'apparaissent pas encore dans la monumentale Encyclopédie de Diderot et de d'Alembert (dont la parution du premier tome date de 1751 et celle du dernier de 1765). Cependant la problématique en question a été soulevée à l'époque de sa parution. En 1761 par exemple, d'Alembert publie un ouvrage *d'Opuscules mathématiques ou mémoires* …[2]. Il écrit dans le troisième, *Recherches sur les oscillations d'un corps quelconque qui flotte sur un fluide* :

> lorsqu'un corps est en équilibre sur un fluide, & qu'on le déplace un peu de cet état, on peut voir par les calculs précédens, si l'état d'équilibre étoit *ferme*, comme l'appelle M. Daniel Bernoulli, c'eft-à-dire, fi le corps reviendra de lui-même à cet état. Car il n'y a qu'à examiner fi les ofcillations du corps doivent très petites, ou fi elles ne le seront pas. Dans le premier cas il reviendra, ou tendra à revenir à fon premier état ; dans le fecond cas, il culbutera. V. l'ouvrage cité [*Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, 1752] Art. 125, & le *Traité de Dyn.* Art. 147, feconde édition. (Première édition : 1743)[1]

Dans ce passage du huitième chapitre de l'ouvrage précité (ou « mémoire » intitulé *Remarques sur quelques queftions concernant l'attraction*) d'Alembert fait allusion à un « géomètre Italien » dont il conviendrait de trouver le nom, et

[1] Je n'ai pas pu retrouver le texte de Bernoulli auquel d'Alembert fait allusion : la publication de la totalité des œuvres de Daniel Bernoulli est encore en chantier.

qui pourrait être un des premiers à avoir posé le problème de l'étude de la stabilité :

> Cependant un géomètre Italien, qui a du nom dans les Mathématiques, l'a attaquée par cette considération, que fi le noyau intérieur était aplati, & qu'on dérangeât le fluide extérieur de fon état d'équilibre, il n'y reviendroit jamais, au lieu qu'il y reviendrait de lui-même si le noyau étoit allongé ; d'où il conclud que cette dernière hypothèfe est la feule à pouvoir rendre raifon de l'équilibre. Je pourrois d'abord répondre que dans toutes les recherches qu'on faites jufqu'ici fur la *Figure de la Terre*, il n'a jamais été question que de l'état d'équilibre ; & que jusqu'à ce Géomètre, on n'avait point encore penfé à y ajouter cette condition, que le fluide dérangé de lui-même, fe rétablit de lui-même.

Certes, depuis Newton qui traitait la lune comme une masse fluide, les savants se sont interrogés sur les conséquences que certaines variations des données pouvaient avoir sur les formes et les durées de mouvements particuliers. Cependant, les effets du dérangement des équilibres n'ont point encore soucié tous ces grands esprits qui précédèrent notre géomètre. D'Alembert non plus n'étudiera pas cette question. Rendons-lui par ailleurs ici cet hommage. Il a été en quelque sorte un des tout premiers à avoir mis en œuvre ce que les physiciens appellent parfois le principe de correspondance, cette forme d'illustration de la méthode analogique[2], qui consiste, dans une discipline donnée, en une extension des principes opératoires utilisées à un certain stade de développement de la discipline pour traiter un nouveau stade de développement, plus général que le précédent. D'Alembert a étendu aux points mobiles le principe des travaux virtuels, qui est l'outil d'étude de l'équilibre des points immobiles. Dans la même veine, il a rendu variables les constantes d'intégration de systèmes différentiels

---

[2] Voici ce qu'en dit Heisenberg en 1930 : « L'expression la plus générale du principe de correspondance de Bohr consiste en ceci : Il existe, entre la théorie des quanta et la théorie classique appropriée à la représentation employée, une analogie qualitative qui subsiste jusque sans les détails. Cette analogie ne sert pas seulement de guide pour trouver les lois formelles, sa valeur particulière réside bien plus en ce qu'elle fournit également l'interprétation physique des lois trouvées. » in W. HEISENBERG *Les principes physiques de la théorie des quanta*, Gauthier-Villars, Paris, 1972

particuliers pour obtenir alors les solutions de systèmes différentiels plus généraux. L'arrêt n'est qu'une situation particulière, singulière, du mouvement. Les lettres échangées entre d'Alembert et Lagrange témoignent de la profonde admiration de ce dernier envers d'Alembert. Lagrange a brillamment mis en application ces conceptions pénétrantes de d'Alembert.

En 1777, Laplace publie un premier mémoire, *De l'équilibre ferme des plantes* (tome 9, p.230) où apparaît sous sa plume le terme de stabilité :

> On peut même dire généralement que, dans cette recherche, la considération de la stabilité de l'équilibre est inutile, puisqu'il n'y a point vraisemblablement d'équilibre ferme absolu et que la stabilité est toujours relative à la nature de l'ébranlement primitif.

Dans ce mémoire, « équilibre ferme » signifie constant, mais dans un sens encore vague. Il révèle en tout cas qu'à cette époque, la question de la stabilité était bien présente dans les esprits. Laplace la traite effectivement dans des cas particuliers.

Mais elle sera examinée, pour la première fois dans sa généralité sur le plan mathématique, par Lagrange dans son traité de 1788. Tout le traitement analytique moderne est davantage qu'en puissance dans ce texte fondateur. Nous reviendrons sur ce sujet dans le paragraphe III.

Si Lagrange ne propose aucune définition formelle de la notion de stabilité, il forge cependant les outils mathématiques qui permettront plus tard de la donner. Cette notion semble alors faire partie des concepts naturels dont chacun possède la connaissance immédiate.

Selon la célèbre formule d'Aristote, « l'inanimé précède l'animé ». Lagrange commence par traiter la question de la stabilité des situations en équilibre et immobiles avant d'aborder la question de la stabilité des mouvements.

Dans la section III de la première partie de son ouvrage, consacrée à la statique, Lagrange s'intéresse, dans son paragraphe V, aux « propriétés de l'équilibre ». Voici les lignes où il emploie pour la première fois le terme de stabilité :

> nous allons maintenant démontrer que, si cette fonction est un minimum, l'équilibre aura de la stabilité, en sorte que, le système étant d'abord supposé dans l'état d'équilibre et venant ensuite à être tant soit peu déplacé de cet état, il tendra de lui-même à s'y remettre en faisant des oscillations infiniment petites : qu'au contraire, dans le cas où la même fonction sera un maximum, l'équilibre n'aura pas de stabilité, et qu'étant une fois troublé, le système pourra faire des oscillations qui ne seront pas très petites, et qui pourront l'écarter de plus en plus de son premier état. [page 71]

L'examen de l'équilibre des poulies lui permet de donner une illustration de la théorie qu'il élabore, et il conclut, c'est Lagrange qui impose l'italique dans l'écriture des termes :

> 27. Maintenant il est clair que, comme le poids tend à descendre le plus qu'il est possible, l'équilibre n'aura lieu, en général, que lorsque la valeur de u qui exprime la descente du poids depuis la poulie fixe sera maximum et que, par conséquent, celle de Π sera un minimum ; et l'on voit en même temps que, dans ce cas, l'équilibre sera *stable*, parce qu'un petit changement quelconque dans la position du système ne pourra que faire remonter le poids, lequel tendra à redescendre et à remettre le système dans l'état d'équilibre.
>
> Mais nous avons vu que, pour l'équilibre, il suffit que l'on ait $d\Pi = o$ et, par conséquent, $du = o$, ce qui a lieu aussi lorsque la valeur de u est un minimum, auquel cas le poids, au lieu d'être le plus bas, sera, au contraire, le plus haut. Dans ce cas, il est visible qu'un petit changement dans la position du système ne pourra que faire descendre le poids, qui alors ne tendra plus à remonter, mais à descendre davantage et à éloigner de plus en plus le système du premier état d'équilibre ; d'où il suit que cet équilibre n'aura point de *stabilité* et qu'étant une fois troublé, il ne tendra pas à se rétablir.

Notons que, dans cette étude, Lagrange fait apparaître les formes quadratiques pour lesquelles il donne le procédé, parfois attribué à Gauss, permettant de les réduire à une somme de carrés.

La notion de stabilité apparaît à nouveau dans la seconde partie de l'ouvrage qui traite de la dynamique. On retiendra les lignes suivantes :

> 10. Au reste, entre ces deux états de stabilité et non stabilité absolue, dans lesquels l'équilibre, étant tant soit peu dérangé d'une manière quelconque, tend à se rétablir de lui-même ou à se déranger de plus en plus, il peut y avoir des états de stabilité conditionnelle [ici commence la page 387] et relative, dans lesquels le rétablissement de l'équilibre dépendra du déplacement initial du système. Car si, quelques-unes des valeurs de $\sqrt{k}$ sont imaginaires, les termes correspondants dans les valeurs des variables contiendront des arcs de cercle, et l'équilibre ne sera pas stable en général ; mais, si les coefficients de ces termes deviennent nuls, ce qui dépend de l'état initial du système, les arcs de cercle disparaîtront, et l'équilibre pourra encore être regardé comme stable, du moins par rapport à cet état particulier.
>
> 11. Lorsque toutes les valeurs de $\sqrt{k}$ sont réelles et inégales et que, par conséquent, l'équilibre est stable, les expressions de toutes les variables seront composées d'autant de termes de la forme
>
> $$\mathbf{E} \sin (t\sqrt{k} + \varepsilon)$$
>
> qu'il y a de variables.

Il poursuit quelques lignes plus loin, analysant plus profondément que d'Alembert les observations de Daniel Bernoulli, et se montrant, après celui-ci, précurseur de Fourier :

> Daniel Bernoulli avait remarqué cette composition d'oscillations simples et isochrones dans le mouvement d'une corde vibrante chargée de plusieurs petits poids, et il l'avait regardée comme une loi générale de tous les mouvements qui peuvent avoir lieu dans un système quelconque de corps. Un seul cas, comme celui des cordes vibrantes, ne suffisait pas pour établir une telle loi ; mais l'analyse que nous venons de donner établit cette loi d'une manière certaine et générale et fait voir que, quelques

> irrégulières que puissent paraître les petites oscillations qui s'observent dans la nature, elles peuvent toujours se réduire à des oscillation simples, dont le nombre sera égal à celui des corps oscillants [indépendants, Lagrange l'a énoncé plus haut] dans le même système.
>
> C'est une suite de la nature des équations linéaires auxquelles se réduisent les mouvements des corps qui composent un système quelconque, lorsque ces mouvements sont très petits.
>
> 12. Si les valeurs des quantités $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$, $\sqrt{k''}$, … sont incommensurables, il est clair que les temps des oscillations seront aussi incommensurables et que, par conséquent, le système ne pourra jamais reprendre sa première position.
>
> Mais, si ces quantités sont entre elles comme nombre à nombre et que leur plus grande commune mesure soit μ, on verra facilement que le système reviendra toujours au bout d'un temps $\theta = 2\pi/\mu$, π étant l'angle de 180°. Ainsi θ sera le temps de l'oscillation composée de tout le système.

Quittons Lagrange[3] pour revenir à Laplace. Il publiera plus tard deux autres mémoires, intitulés : *Sur la stabilité de la figure de la mer* (t.11, p 527), et *De la stabilité de l'équilibre des mers*. Dans les pages précitées de son *Exposition du système du monde* de 1796, il reprend d'abord les termes de Galilée ou ceux de Lagrange, rappelle en termes simples comment, selon celui-ci, l'on procède pour établir l'équilibre, donne la caractérisation phénoménologique de ce qu'il entend par équilibre « ferme et stable », distingue à son tour deux modes de stabilité, l'absolue et la relative, également deux modes d'équilibre, le stable et le non stable, et donne un procédé pour les différencier :

i) [<u>les conditions de l'équilibre</u>]

> En concevant la position de chaque point du système, déterminée par trois coordonnées rectangles, la somme des produits de chaque force, par la quantité dont

[3] L'erreur suivante, qui ne figure pas dans la première édition, est mise en exergue par Thomson et Tait dans les dernières éditions de leur *Treatise on Natural Philosophy*, article 343 m : « It is remarkable that both Lagrange and Laplace fell into the error of supposing that equality of roots necessarily implies terms in the solution of the form $t\,\varepsilon^t$ (or $t \cos \rho t$), and therefore that for stability the roots must be unequal. This we find in the *Mécanique Analytique*, Seconde Partie, section VI. … The error of Lagrange and Laplace was pointed out and corrected by Weierstrass in 1858. »

le point qu'elle sollicite s'avance dans sa direction, lorsqu'on fait varier infiniment peu le système, sera exprimée par une fonction linéaire des variations des coordonnées de ses différents points · ces variations ont entre elles des rapports résultant de la liaison des partie du système ; en réduisant donc, au moyen de ces rapports, les variations arbitraires au plus petit nombre possible, dans la somme précédente qui doit être nulle pour l'équilibre, il faudra, pour qu'il ait lieu dans tous les sens, égaler séparément à zéro le coefficient de chacune des variations restantes, ce qui donnera autant d'équations qu'il y aura de ces variations arbitraires. Ces équations réunies à celles que donne la liaison des parties du système renfermeront toutes les conditions de son équilibre.

ii) [équilibre stable]

Il existe deux états d'équilibre très-distincts. Dans l'un, si l'on trouble un peu l'équilibre, tous les corps du système ne font que de petites oscillations autour de leur position primitive ; et alors l'équilibre est *ferme* ou *stable*.

iii) [deux modes de stabilité]

Cette stabilité est absolue, si elle a lieu quelles que soient les oscillations du système : elle n'est que relative, si elle n'a lieu que par rapport aux oscillations d'une certaine espèce.

iv) [deux modes d'équilibre]

Dans l'autre état d'équilibre, les corps s'éloignent de plus en plus de leur position primitive, lorsqu'on les en écarte. On aura une juste idée de ces deux états [le stable et l'autre], en considérant une ellipse placée verticalement sur un plan horizontal. Si l'ellipse est en équilibre sur son petit axe, il est clair qu'en l'écartant un peu de cette situation, par un petit mouvement sur elle-même, elle tend à y revenir en faisant des oscillations que les frottements et la résistance de l'air auront bientôt anéanties. Mais si l'ellipse est en équilibre sur son grand axe, une fois écartée de cette situation, elle tend à s'en éloigner davantage, et finit par se renverser sur son petit axe. La stabilité de l'équilibre dépend donc de la nature des petites oscillations que le système, troublé de manière quelconque, fait autour de cet état. Pour déterminer généralement de quelle manière les divers états d'équilibre stable, ou non stable, se succèdent, considérons une courbe entrante placée verticalement dans une situation

> d'équilibre stable. Dérangée un peu de cet état, elle tend à y revenir ; cette tendance varie à mesure que l'écartement augmente, et lorsqu'elle devient nulle, la courbe se retrouve dans une situation nouvelle d'équilibre, mais qui n'est point stable, puisque la courbe, avant d'y arriver, tendait encore vers le premier état. Au delà de cette dernière situation, la tendance vers le premier état, et par conséquent vers le second, devient négative jusqu'à ce qu'elle redevienne encore nulle ; et alors la courbe est dans une situation d'équilibre stable. En continuant ainsi, on voit que les états d'équilibre stable et non stable se succèdent alternativement, comme les *maxima* et les *minima* des ordonnée des courbes. Il est facile d'étendre le même raisonnement aux divers états d'équilibre d'un système de corps.

Il faudra attendre près d'un siècle pour que soient accomplis des progrès significatifs dans l'étude de la stabilité. Pendant cette période transitoire, la question de la stabilité des corps célestes, comme d'ailleurs des corps fluides, reste la motivation principale pour cette étude. La majorité des mathématiciens du XIX^e^ siècle auront publié au moins un article sur ces sujets. Le titre de cette publication en 1856 de James Clerk Maxwell (1831-1879) est par exemple significatif : *On the stability of the motion of the Saturn's ring* [33], un sujet d'étude traité alors depuis près d'un siècle.

Cependant, dès les années 1840, la construction d'appareillages au fonctionnement régulier conduit à poser des questions de contrôle et de stabilité. L'une des premières études est liée encore à l'astronomie. George Biddel Airy (1801-1892), alors astronome royal, confronté au problème de la régulation du mouvement d'un télescope en compensation de celui qui accompagne le mouvement de la terre, publie en 1851 un premier article intitulé *On a method of regulating the clock-work for equatoreal* [1]. Maxwell, qui rencontre également un problème de stabilisation du mouvement d'un solénoïde en rotation, publie en 1868 une article sur la régulation, *On the governors* [34]. La technique employée par Maxwell dans son article sur les anneaux de Saturne est la linéarisation des systèmes d'équations différentielles – appelés plus brièvement systèmes différentiels, qui donnent les équations du mouvement : ce procédé sera largement utilisée dans les travaux du siècle suivant. Au cours d'une discussion à la London Mathematical Society en 1868, Maxwell pose le problème de trouver un critère de stabilité pour les systèmes différentiels d'ordre quelconque.

W. K. Clifford (1848-1879) donne une réponse [21] qui sera exploitée par Edward John Routh (1831-1917). Routh était familier avec les travaux d'Airy (dont il épousa la fille) et de Maxwell. Il aborde le problème de la stabilité dans un premier ouvrage paru en 1860. Celui qu'il publie en 1877 est le premier traité qui, dans son titre, se réfère à la stabilité : *A treatise on the stability of a given state of motion* [42]. Il y reprend l'exposé d'un critère, dit critère de Routh, qu'il a présenté en 1874 ; on en dira un mot plus loin. Dans ce traité, alors qu'apparaît le terme « instabilité », la notion de stabilité est un peu précisée pour la première fois par l'intermédiaire d'une évaluation des perturbations. Ces perturbations sont désignées par des lettres *x*, *y* &c. :

> The quantities *x*, *y*, *z*, &c. are said to be *small* when it is possible to choose some quantity numerically greater that all of them, which is such that its square can be neglected. This quantity may be called the standard of reference for small quantities.
>
> If, after the disturbance, the co-ordinates *x*, *y*, *z*, &c. remain always small, the undisturbed motion is said to be *stable* ; if, on the other hand, any one of the co-ordinate's become large, the motion is called *unstable.*
>
> It is clear that the same motion may be stable for one kind of disturbance and unstable for another. But it is usual to suppose the disturbance *general*, so that if the motion can be made unstable by any kind of disturbance (provided it is small) it is said to be unstable. On the other hand, it will be called stable only when it is stable for *all* kinds of small disturbances.

Plus loin dans son texte, Routh précise la notion de fermeté : l'emploi du terme « ferme », on l'a vu, remonte au moins à Galilée ; la traduction littérale anglaise est « steady », au sens de permanent :

Assuming that x, y, &c. remain small, we may neglect their squares, and thus the resulting equations will be linear in x, y, z, &c. The coefficients of x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, y, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ &c. in these equations may be either constants or functions of the time. In the former case the undisturbed motion is said to be *steady* for these co-ordinates, in the latter *unsteady*. … We may therefore define a steady motion to be such that the same change of motion follows from the same initial disturbance at whatever instant the disturbance is communicated to the system.

Peu de temps après la publication de ce premier traité, paraîtront d'autres ouvrages faisant appel aux mêmes techniques : *Treatise on natural Philosophy* (1876) de Thomson et Tait [47], *De la stabilité du mouvement* (1882) de M. Joukovsky [27].

Dans ces textes, la géométrie à l'arrière-plan des formules analytiques n'est pas exploitée. Henri Poincaré (1854-1912) la fait apparaître dans une série de quatre mémoires publiés entre 1881 et 1886, et dont l'annonce en quelque sorte est faite en 1880. Ils sont consacrés à l'étude des *Courbes définies par des équations différentielles* [39]. Poincaré crée ainsi la théorie de la dynamique qualitative. Dans cette théorie, sont étudiées les propriétés des trajectoires associées aux mouvements réels ou supposés des objets, ou bien qui représentent les évolutions de certaines des propriétés de ces objets. Deux résultats sont, entre autres, à l'origine de sa motivation pour créer et développer cette théorie. Le premier est celui de Bruns établi en 1877 : pour déterminer quantitativement les trajectoires de n corps, chacun exerçant sur les autres des forces obéissant à la loi de Newton, il n'est d'autre méthode que de passer par des développements en série. Le second résultat paru en 1889, pour lequel Poincaré obtint un premier prix suédois, est de Poincaré lui-même : ces séries divergent, n'ont point de limites finies. Il ajoute cependant :

Néanmoins, l'argument ci-dessus ne suffit pas à établir ce point en toute rigueur.

En effet, Andreï Kolmogorov (1903-1987) et Vladimir Arnold (1937-) montreront qu'il est des cas où la convergence est effective, et, récemment, Alain Chenciner (1943-) a étudié la stabilité effective de certains problèmes à trois et quatre corps.

C'est dans le troisième mémoire publié en 1885 que Poincaré donne ses définitions de la stabilité et de l'instabilité.

> Nous dirons que la trajectoire d'un point mobile est stable, lorsque, décrivant autour d'un point de départ un cercle ou une sphère de rayon *r*, le point mobile, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, y rentrera une infinité de fois, et cela, quelque petit que soit *r*. C'est ce qui arrive dans les trois premiers exemples.
>
> Elle sera instable si, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, le point mobile n'y rentre plus. C'est ce qui arrive dans les deux derniers exemples.
>
> …
>
> L'instabilité est donc la règle, et la stabilité l'exception.

Le problème relatif à seulement trois corps, déjà abordé au dix-huitième siècle, n'est toujours pas entièrement résolu. Dans le mémoire qu'il lui consacre [38], publié en 1890 et à nouveau couronné par le prix de S.M. le roi Oscar II de Suède, Poincaré fait apparaître une notion plus locale de la stabilité, dont il attribue la paternité à Siméon Denis Poisson (1781-1840) :

> Nous avons défini plus haut la stabilité en disant que le point mobile P doit rester à distance finie ; on l'entend quelquefois dans un autre sens. Pour qu'il y ait stabilité, il faut que le point P revienne au bout d'un temps suffisamment long sinon à sa position initiale, du moins dans une position aussi voisine que l'on veut de cette position initiale.
>
> C'est dans ce dernier sens que Poisson entendait la stabilité.

Dans sa notice biographique, Poincaré commente ainsi ce mémoire :

> Je n'ai pu résoudre rigoureusement et complètement le problème de la stabilité du système solaire, en entendant ce mot dans un sens strictement mathématique. L'emploi des invariants intégraux m'a cependant permis d'atteindre certains résultats partiels, s'appliquant surtout au problème dit restreint où les deux corps principaux circulent dans des orbites sans excentricité, pendant que le corps troublé a une masse négligeable. Dans ce cas, si on laisse de côté certaines trajectoires exceptionnelles, dont la réalisation est infiniment peu probable, on peut démontrer que le système repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position initiale. C'est ce que j'ai appelé la stabilité à la Poisson.[4]

On notera que l'une des techniques utilisées par Poincaré, tant dans ses travaux en dynamique qualitative qu'en topologie, remonte à Léonard Euler et à Laplace : on relira ici la fin de son texte précité. Cette technique, également employée par Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) et Leopold Kronecker (1823-1891), consiste, ici pour l'étude de la stabilité des mouvements périodiques et quasi-périodiques, à utiliser la méthode du stéthoscope : on suit un trajet ayant la forme d'une ellipse, plus généralement d'une boucle, trajet le long duquel on examine les propriétés de l'objet mathématique. Poincaré emploiera cette méthode pour définir l'application de retour, pour généraliser l'index de Kronecker, et définir le groupe fondamental d'une variété différentiable.

Jacques Hadamard[5] (1865-1963) et surtout George David Birkhoff (1884 - 1944) [6], à qui l'on doit le vocable de « *systèmes dynamiques* », prolongeront de manière conséquente les travaux géométriques de Poincaré en dynamique qualitative. Birkhoff introduit, entre autres, les notions de points *alpha* et *oméga limites* selon qu'on se tourne vers le passé ou le futur, d'*ensemble errant*, celle de

[4] Cette appellation pourrait bien être de Poincaré qui écrit « à la Poisson » et non pas « de Poisson » ; je n'ai trouvé aucune définition de cette stabilité dans ce que, jusqu'à présent il est vrai, j'ai pu lire Poisson (seulement ses publications parues dans le Journal de l'Ecole Polytechnique(1809, 1831) et la première édition de son traité de mécanique). Des éléments de phrase de Poisson peuvent par contre suggérer la notion de stabilité décrite par Poincaré, comme par exemple celui-ci, tiré de son traité de mécanique : « Le point matériel reprendra la même vitesse toutes les fois qu'il reviendra au même point de cette circonférence … »

[5] Une propriété des mouvements sur une surface, *Comptes Rendus Ac. Sc.*, t.122 (1896) p.983 et : Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique, *J. Math. Pures et Appliquées*, 5e série, t.3 (1897).

mouvements récurrents qui généralisent les mouvements périodiques, et leur associe une notion de stabilité :

> Du point de vue que j'adopte, un mouvement *stable* est un mouvement qui, à partir d'un certain moment et ultérieurement, n'approche jamais indéfiniment près de certaines positions singulières ; je démontre qu'il existe nécessairement un ou plusieurs mouvements récurrents dans le voisinage infinitésimal d'un mouvement stable. [6]

Se référant également aux mémoires précédents de Poincaré sur les courbes définies par des équations différentielles, Alexandre Liapounoff (1857-1918) publie à Kharkow en 1892 son mémoire sur la stabilité où il développe l'emploi des méthodes analytiques déjà utilisées par ses prédécesseurs, notamment par Lagrange. Ainsi, les exposants que l'on dit de Liapounoff sont déjà présents chez Lagrange mais pas de manière aussi explicite certes, de même que la fonction dite de Liapounoff, non croissante le long des trajectoires, n'est autre que la fonction de forces qui apparaît chez Lagrange, comme le dit Liapounoff lui-même. Celui-ci a su généraliser l'emploi de ces outils.

Alors que la définition de la stabilité donnée par Poincaré est géométrique et synthétique, celle de Liapounoff est d'apparence plus numérique, plus précise : les définitions sont en fait très voisines si l'on veut bien remplacer les sphères par des ellipsoïdes, guère plus généraux. Voici ce que nous dit Liapounoff, explicitant par des symboles certains éléments de la définition de Routh : il note par q la position d'un mobile, par q' sa vitesse ; q comme q' possède k composantes. Lorsque le système n'est par perturbé, $q(t) = f(t)$. Si l'on introduit une perturbation ε, la position devient :

$$q(t) = f(t) + \varepsilon.$$

La situation générale est a priori celle où $q(t) = f(t) + \varepsilon$ pour laquelle on considère n fonctions Q_j $(q(t), q'(t))$ de ces données. En l'absence de perturbations, cette fonction est notée $F_j(f(t), f'(t))$.

Nous nous occuperons exclusivement des cas où la solution de la question considérée ne dépend pas du choix de l'instant t_0 dans lequel se produisent les perturbations. C'est pourquoi nous adopterons ici la définition suivante :

Soient $L_1, L_2, \ldots, L_n$ *des nombres positifs donnés. Si pour toutes les valeurs de ces nombres, quelques petites qu'elles soient, on peut choisir des nombres positifs*

$$E_1, E_2, \ldots, E_k \quad E'_1, E'_2, \ldots, E'_k,$$

tels que, les inégalités

$$|\, \varepsilon_j \,| < E_j, \quad |\, \varepsilon'_j \,| < E'_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

étant remplies, on ait

$$|\, Q_1 - F_1 \,| < L_1, \quad |\, Q_2 - F_2 \,| < L_2, \quad \ldots, |\, Q_n - F_n \,| < L_n,$$

pour toutes les valeurs de t qui dépassent t_0, *le mouvement non troublé sera dit stable* PAR RAPPORT AUX QUANTITÉS $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$; *dans le cas contraire, il sera dit, par rapport aux mêmes quantités, instable.*

Le contenu du mémoire de Liapounoff, traduit et publié en 1907 dans les Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse [32], deviendra rapidement le manuel de référence pour l'étude pratique de la stabilité (cf [7]). Depuis Lagrange, en passant par Routh, une bonne part des études de stabilité fait appel aux connaissances sur les racines des polynômes. Le critère de Routh permet d'établir si les parties réelles des racines d'un polynôme sont positives – le système est alors instable. Un critère voisin sera donné en 1895 par Adolf Hurwitz (1859-1919), en réponse à un ingénieur qui devait résoudre un problème de stabilité de turbines hydroélectriques [26].

Le traité d'énergétique [22] de P. Duhem paru en 1911 expose la plupart des techniques développées par Lagrange, Routh, Poincaré ou Liapounoff, et les emploie dans l'étude de divers milieux physiques où il faut notamment tenir compte de la production de chaleur. Duhem rappelle dans cet ouvrage qu'Hadamard avait, indépendamment de Liapounoff, énoncé le critère d'instabilité d'un point singulier caractérisé par l'existence d'une fonction de forces positive croissante le long des trajectoires au voisinage du point singulier, et qui se situe dans le prolongement des observations de Lagrange.

Les grands traités d'analyse de la première moitié du XX$^{\text{-ième}}$ siècle incluront un chapitre sur la stabilité, et les très nombreux travaux d'affinage sur ce thème prolongeront pour partie ceux de Liapounoff.

Les résultats de Liapounoff et les études théoriques en dynamique qualitative trouveront leurs premières applications auprès de l'école russe de physiciens et d'ingénieurs travaillant, dans les années 1920, autour du physicien L. I. Mandelstham, à l'époque de la radioélectricité naissante.

En 1937 apparaît, sous la plume d'Alexandre Andronov[6] (1901-1952) et de Lev Pontrjagin (1908-1988)[7], la notion de stabilité globale d'un système dynamique, et donc d'un ensemble de trajectoires [3]. Ces auteurs appellent de tels systèmes « grossiers ». Dans sa traduction parue en 1949 d'un ouvrage d'Andronov consacré à la théorie des oscillateurs, Solomon Lefschetz (1884-1972), créateur du terme « topologie », les qualifiera de « *structurellement stables* », une terminologie maintenant consacrée. La définition des auteurs russes est plutôt dans l'esprit de celle de Liapounoff. La définition moderne est dans le style de Poincaré faisant suite au développement de la topologie qui diffuse de nouveaux termes comme celui d'homéomorphisme, lequel désigne une correspondance bijective et bicontinue entre deux domaines. Une manière de comprendre la stabilité structurelle est la suivante : le système est structurellement stable si en déformant légèrement par un homéomorphisme, sans en altérer ainsi les propriétés fondamentales, le domaine où s'accomplit le mouvement, on peut modifier, un tantinet également, les équations du mouvement de sorte que l'allure générale de l'ensemble des trajectoires, bien que peut-être localement différentes dans leur forme mais non point dans leurs

[6] Il développa la théorie du contrôle ; lire à son sujet l'article de Chris Bissel http://ict.open.ac.uk/reports/1.pdf
[7] Aveugle dès l'âge de 14 ans, excellent topologue, il plongea, dans ses dernières années, dans un antisémitisme actif.

propriétés essentielles, reste inchangée. La signification physique de cette définition est très intéressante : si, par exemple, les équations du mouvement dépendent de paramètres difficiles à mesurer mais dont les variations modifient peu les équations, alors les mouvements eux-mêmes ne sont pas profondément perturbés par ces variations.

Cette espérance en cette forme de stabilité a été longtemps partagée, notamment par les esprits physiciens, bien avant qu'on ne l'ait formellement formulée. Ces lignes de Joseph Boussinesq (1842-1929) et qui datent de 1879 l'attestent [10] :

> Il est bon d'observer, à cette occasion, que la mise en compte de petites forces perturbatrices, dans le problème des solution singulières que comportent les équations du mouvement d'un système, ne doit généralement modifier que peu les intégrales particulières de ces équations et, par suite, leurs lieux de réunion et de bifurcation qui sont les solutions cherchées.

Certes, certains systèmes dynamiques sont structurellement stables. C'est le cas par exemple des systèmes dits hyperboliques introduits au siècle dernier par Oskar Perron (1880-1975) et formalisés par Stephen Smale (1930-). On pourrait les appeler en fait *systèmes dynamiques de Poisson*, car Poisson a parfaitement défini en 1831 la propriété caractéristique de ces systèmes pour lesquels :

> Il arrive en général que la contraction positive ou négative est différente en différents sens autour d'un même point M, et qu'il y a même dilatation dans un sens et contraction dans une autre direction. [42]

Cependant, ruinant la conviction de R. Thom, S. Smale a établi en 1966 [45] que la propriété d'être structurellement stable est rare, n'est pas vérifiée pour presque tout système dynamique : on dit que cette propriété n'est pas générique, elle manque de stabilité[8].

Le développement des techniques employées par les mathématiciens, et la mise au jour de nouvelles situations dépendant des domaines occupés par les trajectoires, ont conduit à établir parfois des définitions de la stabilité comme par exemple la *stabilité asymptotique*, la *stabilité conditionnelle*, la *stabilité infinitésimale*, la *quasi-périodicité*, l'*oméga-stabilité*, etc, adaptées à ces contextes particuliers.

Rentrent tout à fait dans ce cadre classique :

- la mise en évidence de phénomènes et des systèmes qualifiés de chaotiques, mais qui présentent des récurrences internes au sein d'attracteurs parfois qualifiés d'étranges, et qui ont leur propre stabilité structurelle globale ;
- l'effet « papillon », selon lequel de petites causes peuvent avoir de grands effets, connu encore sous le nom de sensibilité aux conditions initiales. On notera que ce thème est potentiellement présent chez Lagrange, et avant lui, chez Galilée qui écrit, dans la quatrième journée de son dialogue (fin 704) :

> J'en conclus qu'il suffit de toutes petites variations par rapport à la grandeur immense et à l'extrême vitesse des mers, pour produire ces changements qui ne sont grands que par rapport à notre petitesse et à celle de nos phénomènes.

La philosophie populaire n'ignore pas l'importance des conséquences possibles de ces petits évènements. Dans *Le Chevalier d'Harmental*, son premier grand roman historique, éclatant d'humour et d'abord paru dans le cours des années 1841-1842, Alexandre Dumas (1802-1870) fait observer que

[8] On trouvera dans l'article de Marc Chaperon (http://www.math.jussieu.fr/~chaperon/stabstruct.pdf) des exemples illustrant cette non-généricité, et dans [ ] une première critique phénoménologique de la stabilité structurelle.

> Ce serait une curieuse histoire à faire que celle des grands effets produits par une petite cause depuis les Grecs jusqu'à nous.

Poincaré, qui, sait-on jamais, a peut-être lu ce roman de Dumas, en tire cette leçon bien connue :

> Il peut arriver que de très petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières en produit une énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons un phénomène fortuit. [41]

L'œuvre du grand savant toutefois ne contient pas d'exemple explicite illustrant un tel phénomène.

Il semble établi qu'en 1927, le physicien Balthasar Van der Pol (1889-1959) et son collègue Van der Marek aient construit un dispositif à tube électronique par lequel ils ont observé un phénomène de chaos déterministe qu'ils n'ont pas analysé en détail. Il revient au météorologue Edward Lorenz (1917-) d'avoir donné en 1963 le premier exemple explicité de système chaotique. La mécanique des fluides est un domaine privilégie d'apparition de tels phénomènes, notamment de turbulence. C'est dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques que David Ruelle (1935-) et Floris Takens ont placé l'étude de ces phénomènes [44].

La formalisation du partage élémentaire, de l'allocation des ressources, permet d'illustrer très simplement le phénomène de sensibilité aux conditions initiales : un premier investisseur a acheté hier pour 150 Euros, deux actions de l'entreprise X et une action de l'entreprise Y, alors que, le même jour, un second investisseur a acquis, pour 200 Euros, une action de l'entreprise X et une action l'entreprise Y. Les employés des impôts, s'interrogeant sur les prix réels d'achat respectivement x et y des actions A et B, vont résoudre le système d'équations linéaires :

$$2\,x + y = 250$$

$$x + y \;= 200$$

On le présente sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\;\; b = \begin{bmatrix} 250 \\ 100 \end{bmatrix},\;\; X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Supposons qu'industriel ait à traiter un cas un peu moins élémentaire – on supposera cet industriel russe pour rendre hommage aux auteurs[9] de cet exemple classique. Voici, pour les différentes données expérimentales figurant dans les matrices A et b, les résultats X qu'il obtient :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix},\; b = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix},\;\; X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix},\; b = \begin{bmatrix} 32{,}1 \\ 22{,}9 \\ 33{,}1 \\ 30{,}9 \end{bmatrix},\;\; X = \begin{bmatrix} 9{,}2 \\ -12{,}6 \\ 4{,}5 \\ 1{,}1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8{,}1 & 7{,}2 \\ 7{,}08 & 5{,}04 & 6 & 5 \\ 8 & 5{,}98 & 9{,}89 & 9 \\ 6{,}99 & 4{,}99 & 9 & 9{,}98 \end{bmatrix},\; b = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix},\;\; X = \begin{bmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{bmatrix}$$

On sait que certains algorithmes utilisent par centaines des résolutions de tels systèmes d'équations linéaires[10] … .

[9] D.K. FADEEV- V.N. FADEEV *Computational Methods of Linear Algebra*, W.H. Freeman and Cy, San Francisco, 1963.

[10] S'ajoute aux difficultés présentées par la sensibilité aux conditions initiales, celles qu'apportent les erreurs d'arrondies. Mentionnons ici l'exemple donné par Jean François Colonna : soit B = 4095.1, A = B + 1, de sorte que A – B = 1 = x_1. On calcule x_{n+1} = A x_n – B. On trouve rapidement x_5 = 1.031259917540718, x_7 = 524480.9968805739190429, x_9 = 8799743854603.9609375000000000 !!!

Naturellement, l'incertitude qui pèse sur l'avenir conduit à formuler les questions en termes probabilistes. De très nombreux travaux, depuis Poincaré, leur ont été en effet consacrés, et il arrive qu'on puisse démontrer la stabilité de mouvements quasi-aléatoires, notamment dans le cadre des systèmes de la mécanique classique dite hamiltonienne (théorie KAM).

V. 2 La stabilité absolue ou l'invariance

IV.2.1 *Dans le monde observable*

La stabilité absolue s'exprime par la mise au jour de phénomènes et de lois invariantes, d'énoncés qui se veulent universels. Considérons d'abord le cas de la physique expérimentale. En dehors des expressions de la pérennité apparente des mouvements du ciel, le phénomène optique d'invariance des proportions, formalisé sous le nom de théorème dit de Thalès (625-547), est peut-être la plus ancienne observation dans le domaine de la physique ; la philosophie pythagoricienne repose en grande partie sur l'observation de ce phénomène, sur la conviction de son absolue généralité.

On a rencontré dans le second chapitre la règle d'équilibre du dispositif du levier, également sans doute fort ancienne, et présentée dans le traité de mécanique relevant de l'école d'Aristote. Celui-ci énonce par ailleurs une première observation de fonds sur la nature des mouvements dans l'espace usuel : tout mouvement est la composée de translations et de rotations – il reviendra au mathématicien Joseph Liouville (1809-1882) de donner à cet énoncé sa forme la plus générale. A vrai dire, nous connaissons peu du savoir scientifique et technique de la civilisation grecque, comme des civilisations dont elle s'est inspirée : qu'Hipparque (190-120) ait conçu un modèle héliocentrique du mouvement des planètes, attirées par le soleil selon une force inversement

---

[http://www.lactamme.polytechnique.fr **[**Do you believe that Real Numbers exist for a computer and that floating point computations are safe?**]**]

proportionnelle au carré de leur distance à notre étoile, est un fait découvert seulement récemment.

C'est à partir du XVII[e] siècle qu'apparaissent véritablement les lois physiques. Képler publie ses deux premières lois en 1609, la troisième en 1618. Suivent les lois sur la réfraction de la lumière, et les premières mesures de pression. Puis la loi de Newton sur l'action réciproque de deux masses inertes, puis, au siècle suivant, la formulation de lois de l'hydrodynamique (Daniel Bernoulli, d'Alembert, Euler). Longue est la théorie des règles de comportement stable des phénomènes que l'on a découvert. En fait, ces règles ne sont souvent stables que sur des domaines spécifiés de l'espace-temps, qu'en présence de contraintes environnementales acceptables.

Se rapportant en particulier à ces particules très singulières, sans masse, que sont les photons, dont Einstein affirmera l'invariabilité de la vitesse, couvrant alors le champ a priori infini des longueurs d'onde, les lois gouvernant l'électromagnétisme, telles que les a formulées Maxwell en 1863, sont sans doute parmi les plus stables qui soient : les physiciens semblent ne pas mettre pas en doute leur absolue validité depuis le big bang. Le « miracle » des lois physiques repose de manière essentielle sur leur qualité impressionnante de stabilité.

V.2.2 *Le cas de la physique théorique ou physique mathématique*

Il convient d'établir la distinction entre les lois façonnées à partir de l'observation et de l'expérience directes, par exemple une règle de dilation des métaux en fonction de leur température (loi de Dulong et Petit), et les lois et invariants établis sur la base, certes de données de l'expérience, mais également de représentations symboliques et de raisonnements. C'est le cas par exemple de l'une des premières lois établies, celle de Galilée selon laquelle, dans la belle formulation de Lagrange, « le chemin vertical parcouru par un corps grave est proportionnel au carré de la vitesse qu'il acquise en descendant librement ».

De très nombreuses lois sont l'expression symbolique d'équilibres locaux, et traduisent donc de ce fait une stabilité spatio-temporelle très locale.

Souvent devenus des énoncés de mathématique pure, on ne compte plus les énoncés d'invariance en physique. Le premier d'entre eux, rencontré au chapitre précédent, établi par Huyghens, celui de la conservation de la force vive, puis ses successeurs immédiats, relèvent de la mécanique : conservation du mouvement du centre de gravité, du moment de rotation par Jean Bernoulli, conservation de l'énergie globale des systèmes mécaniques (lagrangiens-hamiltoniens).

Rien de plus évident que l'énoncé selon lequel la variation instantanée du contenu d'un volume est égale à la quantité de matière qui traverse sa surface. Cet énoncé, qui se rapporte globalement à un phénomène local, a été traduit en termes symboliques ; présenté depuis sous la forme de théorème après les analyses de Gauss, de Green (cf le chapitre précédent), de Thompson-Stokes[11] (1819-1903) et d'Ostrogradksy (1801-1861), il a pour origine, pour les auteurs britanniques, leurs travaux en électrostatique.

Toutes ces constructions et tous ces résultats seront souvent employés comme outils pour fonder les équations de comportement locaux de nombreux phénomènes. Un autre procédé d'étude sera présenté au paragraphe III.2.4. Mais auparavant, il nous faut considérer le cas des mathématiques.

V.2.3 *Mathématique et invariance*

La notion d'invariance en mathématique semble avoir été inspirée par les philosophes et logiciens de l'école anglaise à la recherche de données et de propriétés « permanentes ». La physique proprement dite ne semble pas concernée par ces premières recherches formelles : elles se rapportent plutôt aux mathématiques pures. Sous l'influence du logicien et mathématicien George

[11] Le théorème de Stokes a été énoncé en fait en 1854 par W. Thompson (cf : http://wwwdim.uqac.uquebec.ca/~pjoyal/cours/8Mat102/notes/notes.html#fondamentaux). Un des espoirs de Bourbaki était de parvenir à en donner une démonstration rigoureuse.

Boole (1815-1863), Arthur Cayley (1821-1895) entreprend des premiers travaux dans cette direction dans les années 1845 ; il cherche à trouver des expressions invariantes par des transformations linéaires. Il n'utilise pas d'ailleurs le terme d'invariant mais celui en quelque sorte d'expressions dérivées :

> find all the derivatives [invariants] of any number of functions [en l'occurence des formes algébriques] which have the property of preserving their forms unaltered after linear transformation of the variables. [19]

Peut-être, dans sa démarche, Boole a-t-il été inspiré également par les travaux antérieurs de François Viète (1540-1603) et de Lagrange qui avaient remarqué que les coefficients des polynômes pouvaient s'exprimer en fonction de leurs racines, expressions invariantes par « *substitution* » disait-on, permutation de ces racines dit-on aujourd'hui.

En 1854, Cayley introduit la notion de groupe abstrait [19] :

> A set [fini] of symbols 1, α, β, … all of them different, and such that the product of any two of them (no matter in what order), or the product of any of them onto itself, belongs to the set, is said to be a *group*.

Il indique dans une note :

> The idea of group as applied to permutations or substitutions is due to Galois, and the introduction of it may be considered as marking an epoch in the progress of the theory of algebraic equations.

Il donne notamment dans cet article les exemples des groupes finis à quatre éléments, à savoir le groupe cyclique et le groupe qu'on appellera plus tard le *viergruppe* de Klein. Comme on le comprend à la lecture de son article paru dans *The English Encyclopedia* de 1860 [19], la recherche d'invariants par transformations fait partie des raisons de son intérêt pour les groupes.

En 1868, Helmholtz entend caractériser les propriétés de l’espace par les transformations qu’on y peut opérer [24]. Notons que l’existence des transformations standard suppose l’homogénéité de l’espace, son isotropie. Félix Klein (1849-1925), élaborant une synthèse des travaux antérieurs, en vient en 1872 à énoncer sous la forme d’un programme [28] l’une des activités essentielles et souvent inconsciente des mathématiciens :

> Il y a des transformations de l’espace qui n’altèrent en rien les propriétés géométriques des figures. Par nature, ces propriétés sont, en effet, indépendantes de la situation occupée dans l’espace par la figure considérée, de sa grandeur absolue, et enfin aussi du sens dans lequel ses parties sont disposées. Les déplacements dans l’espace, ses transformations avec similitude et celles par symétrie, n’altèrent donc pas les propriétés des figures, non plus que les transformations composées avec les précédentes. Nous appellerons *groupe principal* de transformations de l’espace l’ensemble de toutes ces transformations ; *les propriétés géométriques ne sont pas altérées par les transformations du groupe principal*. La réciproque est également vraie : *les propriétés géométriques sont caractérisées par leur invariance relativement aux transformations du groupe principal.*
>
> …
>
> *On donne une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité ; développer la théorie des invariants relatifs à ce groupe.*
>
> Tel est le problème général qui embrasse non seulement la Géométrie …

A partir de cette époque, on s’emploiera à la mise au jour d’invariants : qui dit invariant présuppose des mouvements, qui peuvent n’être que de simples déplacements dans l’espace, ou qui, de surcroît, peuvent être accompagnés de modifications de forme, voire de structure et de fonction.

On est donc conduit à envisager d’abord divers types de transformations, que l’on pourra qualifier de stables ou non par rapport aux propriétés qu’elles peuvent affecter. D’une façon assez générale, la plupart de ces transformations, fussent-elles des projections, sont stables vis à vis de la structure topologique qu’elles respectent. On rencontre donc ces invariants en particulier à travers l’examen même des transformations, caractérisées d’une part par les objets sur lesquels elles s’appliquent, d’autre part par ce qu’elles laissent invariants.

Les transformations les plus courantes sont : les transformations linéaires qui comprennent notamment les rotations et les dilatations ainsi que leurs composées, et dont les invariants sont les directions propres ; les homéomorphismes, transformations élémentaires qui conservent les structures topologiques ; les isométries qui conservent les longueurs, et les transformations conformes qui conservent les angles comme en particulier la projection stéréographique par laquelle on fabrique les planisphères. Ces transformations, qui apparaissent parfois sous le nom de déformations, et d’autres davantage liées aux modes d’évolution du monde physique, sont présentes naturellement dans les études de mécanique (invariants de Liouville, invariants intégraux de Poincaré qui généralisent la loi de conservation des aires de Kepler, invariants d’Elie Cartan (1869-1951), invariants spectraux, adiabatiques, trajectoires invariantes, etc), et de physique (invariants de Noether) ; elles sont employées également pour caractériser des familles d’objets (dimension, connexité, groupes d’homotopie et d’homologie, genres et indices, invariants de Jones et de Donaldson, etc).

Reconnaître des invariants sera l’un des objectifs importants de la recherche en mathématique. L’étudiant qui aborde l’étude des structures mathématiques rencontre très tôt, à travers son initiation à la théorie des groupes, les termes de « stabilisateur » et de « sous-groupe invariant »[12] : ces termes témoignent de l’importance et de l’imprégnation en profondeur des questions liées à la stabilité.

Il faut noter par ailleurs que toute proposition mathématique possède une vérité intemporelle à l’intérieur du cadre formel et axiomatique où elle est inscrite. De ce point de vue, son énoncé est d’une stabilité absolue.

[12] On utilisait autrefois, au lieu d’invariant, les adjectifs peu signifiants « distingué » ou bien « normal ».

Cela dit, les progrès en analyse accomplis par Karl Weierstrass (1815-1897) et Georg Cantor (1845-1918) ont conduit René Baire (1874-1932) [4], au début des années 1900, à établir une sorte de hiérarchie entre certains espaces situés à l'intérieur d'autres espaces. On rencontre ainsi des propriétés qui sont vraies sur un espace intérieur – comme par exemple être partout continues et dérivables, ou bien rester invariantes par des transformations locales ou globales comme les translations – mais qui perdent cette qualité sur leur bord. Un exemple célèbre de propriété générique est celui de transversalité due à Thom (la transversalité géométrique est la plus simple ; deux droites (et plus généralement deux courbes) non confondues, qui ont un point commun sans être tangentes en ce point, sont dites transversales ; une droite étant donnée, il existe une infinité de droites qui lui sont transversales ; la propriété d'une droite du plan à être transversale à une droite donnée de ce plan est ainsi générique ; la propriété ne s'effondre que dans le cas singulier où les droites sont confondues ou tangentes ; voir par exemple le dessin de la figure 2). Ces propriétés génériques, ainsi vraies presque partout, sont dites, dans certaines théories où l'on impose l'invariance par rapport à une transformation donnée comme par exemple la translation, *prévalentes*. On peut alors parler d'une stabilité relative de ces propriétés. D'autres propriétés peuvent au contraire ne se maintenir que sur des sous-ensembles maigres. On peut les considérer comme instables par rapport à l'étendue du domaine considéré.

La notion de stabilité des propositions a été envisagée par Georges Bouligand (1889-1979) en 1935 [7]. Mais, même à l'heure actuelle, on ne peut presque rien dire de précis sur cette question. Ainsi J. May, dans un article sur l'histoire de la topologie algébrique [36], ne peut-il donner qu'une ébauche de définition :

> Roughly speaking, a phenomenon in algebraic geometry is said to be « stable » if it occurs at least for large dimensions, in a manner independent of dimension.

Comment par exemple définir de manière précise le domaine *sémantique* d'un terme, d'un élément de phrase, une manière contrôlée de le déformer, sa capacité d'affinité avec d'autres termes ou avec d'autres éléments de phrase, comment établir la vérité *autre que formelle* d'une association de termes ?

C'est un aspect plus caché de l'invariance que nous allons plutôt aborder.

V.2.4 Sur l'invariance par symétrie comme critère de stabilité

Ce n'est qu'au XIX-ième siècle que s'est manifesté un premier intérêt scientifique pour la symétrie, chez les seuls cristallographes dans un premier temps. Pourtant, depuis le début de formalisation par Archimède de la mécanique statique, on aurait pu, dès l'introduction du parallélogramme des forces, davantage s'intéresser à l'équilibre d'un système soumis en son centre de gravité à un jeu de plusieurs forces dirigées en des sens différents. Non seulement il eût été possible de développer à partir de ce cas élémentaire l'étude des symétries, mais aussi étudier la stabilité d'un tel système lorsque apparaissent des frottements et des perturbations légères des forces en présence. Sans aucun doute ont fait défaut l'absence d'intérêt pour ce problème et le formalisme pour le traiter.

René Just Haüy (1743-1822) et Auguste Bravais (1811-1863) peuvent être considérés comme les fondateurs modernes de la cristallographie. Adrien-Marie Legendre (1752-1834) et Poisson, en partie leurs contemporains, feront par exemple quelquefois appel à la notion de symétrie le premier en géométrie, le second pour justifier le contenu d'une fonction. Mais, dans l'ensemble, les mathématiciens de ce même siècle ignoreront cette notion.

Pierre Curie (1859-1906), après ses études sur la piézo-électricité du quartz, énonce en 1894 son célèbre principe qui a eu et conserve une influence profonde sur l'évolution de la physique :

« *Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.* »

Intuitivement, *si un objet présente quelque symétrie, c'est qu'existe dans sa constitution un système de forces internes qui s'équilibrent, et qui contribuent à assurer de ce fait la stabilité de l'objet ; et réciproquement, si un tel système de forces s'établit en équilibre, il est naturel qu'il en imprègne la structure de l'objet en question, et qu'il s'extériorise en sous la forme d'une morphologie présentant des symétries.*

Symétrie et stabilité sont ainsi liées. J'ai été ainsi conduit à introduire dans [16] un principe méthodologique fort général, associé au degré de symétrie le plus simple celui d'ordre 2, et que voici :

> OBSERVATION MÉTHOGOLGIQUE 2 (OM) 2 : *La nature a tendance à stabiliser un objet instable en le doublant, et en liant entre eux l'objet et sa réplique par un dispositif de régulation transverse à chaque objet.*
>
> Cette technique de stabilisation est parmi les plus simples que l'on puisse envisager, et parmi les plus fréquemment employées. La genèse de cette technique reste un grand mystère.

Un des exemples parmi les plus simples qui illustre ce procédé est celui de l'haltère : une pièce de monnaie, posée sur la tranche, est dans une position instable. On stabilise cette pièce en en prenant une seconde, puis en fixant l'objet et sa réplique à un petit barreau transversal aux deux pièces.

De par l'association entre stabilité et symétrie, on peut s'attendre à une relation forte également entre présence de symétries et conservation des valeurs de paramètres caractéristiques de l'objet. C'est ce qu'exprimeront les énoncés de la mathématicienne Emmy Noether (1882-1935) [37] [29], d'un très large et important emploi en physique théorique.

Nous avons vu que Félix Klein a redéfini la géométrie comme l'étude des propriétés invariantes par des groupes de transformations. Ces transformations peuvent être physiquement représentées par des opérations de transport : il en est ainsi par exemple des translations *t* selon une droite, représentées par des nombres réels.

Le fait qu'elles forment un groupe tient à ce qu'elle vérifient les quatre propriétés *c*, *a*, *n*, *s* des éléments de tout groupe : ***c**omposition)* les translations (transformations) peuvent se composer entre elles selon une loi qu'on peut noter comme veut, par exemple + : t + t' a un sens, est une translation τ (une transformation) ; ***a**ssociativité)* le résultat de la composition de (t + t') avec t'' est le même que celui de la composition de t avec (t' + t) ; ***n**eutre)* il existe bien sûr la translation nulle 0 (la transformation sans effet) ; ***s**ymétrie)* toute translation t admet une symétrique notée – t qui nous ramène au point de départ (t + (– t) = 0) (cette propriété caractérise donc une réversibilité parfaite des transformations, par conséquent encore une fois dépendant de l'homogénéité et de l'isotropie du domaine sur lequel elles opèrent).

Au début du XXe siècle, on ne voit pas encore ces groupes comme des groupes de symétries : à l'époque, le symétrique d'un élément d'un groupe est plutôt appelé son « *inverse* » – il en est ainsi dans tous les articles de Noether. Il est symptomatique que Klein, dans son programme précité, présentant la notion de groupe omette totalement de préciser la dernière propriété, à savoir que tout élément possède un symétrique, un inverse aurait-il dit.

Si l'on garde à l'esprit qu'une propriété mathématique, géométrique en particulier, possède une signification physique, le discours de Klein prend le sens concret suivant : supposons qu'une figure géométrique représente une propriété physique déterminée dans un espace donné, disons une énergie ou une masse, les géomètres jusqu'au XVIIIe siècle nous en ont donné des exemples, alors cette propriété est conservée par une des transformations obéissant à une loi de groupe et opérant sur l'espace en question.

C'est par l'intermédiaire des travaux de mathématiciens suivant de près l'évolution de la physique (comme Félix Klein, David Hilbert (1862-1943), Hermann Weyl (1885-1955), ainsi que de physiciens théoriciens (dont Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) et quelques-uns de ses élèves), qu'Emmy Noether, en 1918, est conduite à donner une forme précise au principe de Curie pour des systèmes physiques dont on connaît la représentation lagrangienne, puis hamiltonienne : elle donne une expression quantitative aux « effets », les causes figurant dans la construction du lagrangien.[13]

Emmy Noether a énoncé deux théorèmes généraux mais dont seul le premier a été et reste abondamment utilisé par les physiciens (cf l'Appendice 3.2). Les énoncés font appel à un groupe de transformations G, fini ou non, dépendantes continûment de r paramètres linéairement indépendants, et qui laissent *invariante* l'action globale lagrangienne **S**. Les physiciens parlent aujourd'hui de ce groupe comme étant un *groupe de symétries*, ce qui est, pour le mathématicien, une sorte de tautologie puisque, par définition, dans un groupe, tout élément possède un symétrique. Puisque l'action reste invariante, on peut s'attendre à ce que des expressions dérivées de celle de l'action soient également invariantes. Lorsque le groupe de transformations est fini, le théorème le plus utilisé affirme, en dimension 1, l'existence de r intégrales premières ; en dimension supérieure, il fait apparaître la nullité de divergences souvent notées J, « *qui, depuis peu,* écrit E. Noether, *sont souvent appelées « lois de conservation »* ». Ces invariants J sont maintenant appelées par les mathématiciens et les physiciens théoriciens des *courants de Noether*, et leur intégrale, des *charges*.

[13] Son texte de mathématicienne ne fait nullement allusion à Curie – pas davantage ne mentionne Curie le bon ouvrage historique récent d'Y. Kosman-Shwarzbach [29] consacré aux théorèmes de Noether et qui donne une traduction du texte original.